

# 平面扩展简单多边形的布尔运算

董未名<sup>1)</sup> 玛依拉·巴榜<sup>1)</sup> 周登文<sup>2)</sup> 孙家广<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(清华大学计算机科学与技术系 北京 100084)

<sup>2)</sup>(华北电力大学(北京)计算机科学与技术系 北京 102206)

**摘 要** Rivero 等最近提出了一种用来计算任意平面简单多边形的交、并、差的新方法,在这一算法基础上进行扩展,使其可以应用到带圆锥曲线边的平面扩展简单多边形上,并给出了完整的数学模型。

**关键词** 布尔运算;扩展多边形;多边形求交

**中图法分类号** TP391

## Boolean Operations on General Planar Curved-Edge Polygons

Dong Weiming<sup>1)</sup> Maira Babang<sup>1)</sup> Zhou Dengwen<sup>2)</sup> Sun Jiaguang<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing 100084)

<sup>2)</sup>(Department of Computer Science and Technology, North China Electric Power University, Beijing 102206)

**Abstract** M. Rivero and F. R. Feito have presented a new algorithm to calculate intersection, union and difference between general planar polygons (manifold and non-manifold, with and without holes). In this work, we extend this algorithm to curved-edge polygons. And we also found a formal mathematical model of it.

**Key words** Boolean operation; curved-edge polygon; polygon intersection

## 1 引 言

平面简单多边形的布尔运算是计算几何、计算机图形学中的基础问题之一,在几何和实体造型等领域中有着广泛的应用价值。例如,平面消隐操作的基础就是二维平面多边形的布尔运算。因此,设计一个稳定而有效的多边形布尔运算的算法是非常必要的。国内外许多专家对此进行了大量有益的探索,并提出了相应的算法,但是这些算法大部分都没有建立完整的数学模型,只局限于对凸多边形进行操作<sup>[1-2]</sup>。还有一些算法虽然可以对任意多边形进行操作<sup>[3-5]</sup>,但是运算过程大多比较烦琐,而且在某些特殊情况下还不是很有效,甚至无法得出正确的结果。

最近, Rivero 等提出了一种非常有效的布尔运算算法<sup>[6]</sup>,可以对任意平面简单多边形(凸或凹、有

洞或无洞)进行交、并、差的操作。该算法基于一种对几何模型进行数学形式化的算法<sup>[7]</sup>,无需考虑布尔运算中各种烦琐的特殊情况,从而使系统有较高的效率和较强的鲁棒性。但是,他们只给出了完全用直线边表示的多边形的布尔运算算法,而在实际的几何造型系统中,许多复杂的零件完全用直线边来表示是远远不够的。本文工作以这一算法为基础,对其进行扩展,使其可以应用于带圆锥曲线边的平面简单多边形(简称扩展多边形),从而使该算法有了更广泛的应用。

## 2 算法基本原理

Rivero 等的算法在文献[6]中已有详细的讲解,这里不再赘述,下面给出扩展后的算法的基本原理和相关的定义、定理。

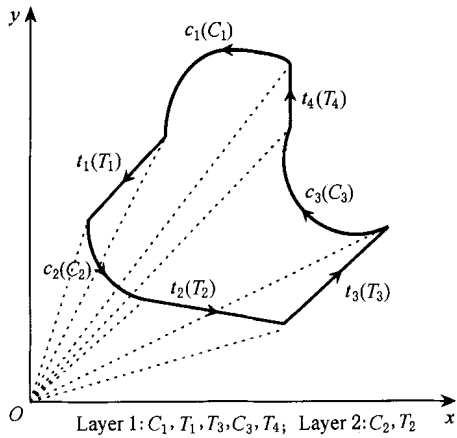
原稿收到日期:2002-07-17;修改稿收到日期:2002-10-28。董未名,男,1979年生,硕士研究生,主要研究方向为CAD & CG。玛依拉,女,1980年生,学士,主要研究方向为CAD & CG。周登文,男,1965年生,硕士,副教授,主要研究方向为CAD & CG。孙家广,男,1946年生,教授,博士生导师,中国工程院院士,主要研究方向为CAD & CG、产品数据管理与企业信息化。

### 2.1 扩展多边形的相关定义

定义 1. 至少有一条边为圆锥曲线(包括圆弧、椭圆弧、双曲线段和抛物线段)的平面简单多边形称为扩展多边形,由直线段构成的边称为多边形的直线边,由曲线段构成的边称为多边形的曲线边. 一个扩展多边形

$$CP = \{ t_1, t_2, \dots, t_n \} \cup \{ c_1, c_2, \dots, c_n \},$$

其中,  $t$  表示直线边;  $c$  表示曲线边,  $c = (f, V_0, V_1, k)$ ,  $f$  是曲线的方程,  $V_0$  和  $V_1$  为两端点,  $k$  的取值为 1 或 -1, 分别表示曲线位于向量  $V_0 V_1$  的右侧或左侧<sup>[8]</sup>. 如图 1 所示,  $\{ t_1, t_2, t_3, t_4 \} \cup \{ c_1, c_2, c_3 \}$  即为一个扩展多边形.



注:  $c_i$  表示曲线边,  $C_i$  表示曲线片,  $t_i$  表示直线边,  $T_i$  表示三角片  
图 1 一个简单的平面扩展多边形

本文研究的扩展多边形除了有一个封闭的外边界(外环)之外,内部还允许有一个或多个洞(内环). 其中,外环各顶点按逆时针方向排列,内环各顶点则按顺时针方向排列.

不失一般性,我们将所研究的扩展多边形都置于笛卡儿坐标系的第一象限(可通过坐标变换简单实现);同时,我们规定扩展多边形不存在自交现象,即都为简单多边形.

定义 2. 对位于笛卡儿坐标系第一象限的扩展多边形  $CP$ , 将其每条直线边  $t$  的两个端点分别与坐标系原点  $O$  相连, 构成一个闭合三角形, 称为三角片, 称  $t$  为三角片的非原边(non-original edge), 与原点相连的边称为三角片的原边(original edge); 将每条曲线边  $c$  的两个端点分别与坐标系的原点相连, 构成闭合多边形, 称为曲线片, 同样地, 称  $c$  为曲线片的非原边(non-original edge), 与原点相连的边称为曲线片的原边(original edge).

如图 1 所示, 将扩展多边形各边的顶点与原点相连, 便可以得到一系列三角片或曲线片.

需要考虑一个特殊情况. 如图 2 a 所示, 在构造曲线片  $C_1$  时, 它的原边和非原边之间产生了交点, 这样在计算从属关系时会发生问题, 所以这种情况是不允许出现的. 我们进行如下处理:

如果从原点引出的任意一条射线与曲线片的非原边有多于一个的交点(包括顶点), 则将曲线片分割成更小的片. 求出从原点出发的射线与曲线片原边的切点, 以切点作为分割点将曲线段分割, 将分割后的曲线段作为新的边代替原来的边加入到扩展多边形中. 这样, 分割后将产生多个曲线片, 这些曲线片的原边与非原边不存在除顶点外的交点, 且从原点引出的任意一条射线与曲线边都最多有一个交点, 如图 2 b 所示. 如不作特殊说明, 本文所研究的都是经过分割之后的曲线片.

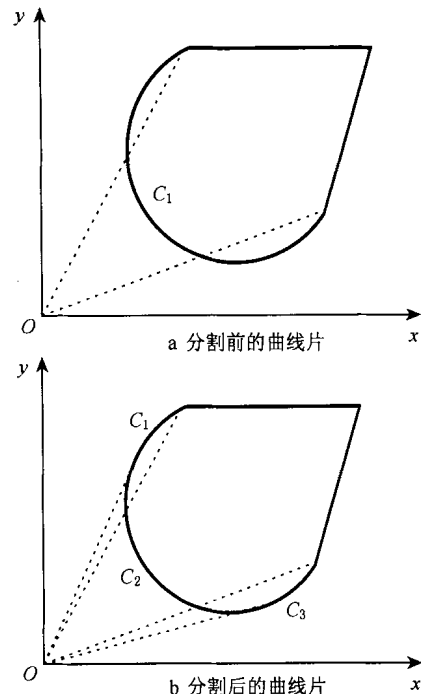


图 2 曲线片的非原边与原边有交点时的处理方法

定义 3. 给定三角片  $T = OP_1 P_2$  或曲线片  $C = OP_1 P_2$ , 使用  $sign$  函数确定三角片或曲线片的系数,

$$\text{sign}(t) / \text{sign}(c) = \begin{cases} +1, & \text{if } x_1 y_2 - x_2 y_1 > 0 \\ -1, & \text{if } x_1 y_2 - x_2 y_1 < 0, \\ 0, & \text{if } x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0 \end{cases}$$

其中,  $O$  是坐标系的原点,  $P_1 = (x_1, y_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2)$  是笛卡儿坐标系下三角片或曲线片非原边的两个顶点.

由此可见, 当  $O, P_1$  和  $P_2$  呈逆时针方向排列时, 三角片或弧形片的系数为 +1, 顺时针时系数为 -1, 当三点位于同一条直线上时系数为 0.

定义 4. 给定三角片  $T_i$ , 定义其系数  $i = \text{sign}$

([  $T_i$  ]), 给定曲线片  $C_i$ , 定义其系数  $\mu_i = \text{sign}([ C_i ])$ .

定义 5. 二维三角片链表示为  $\mu = \sum_{i=1}^m T_i$ ,  $i$

$Z$ ; 二维曲线片链表示为  $\mu = \sum_{i=1}^m C_i$ ,  $i$   $Z$ .

我们将三角片和曲线片的集合统一用集合  $S$  来表示, 各顶点按逆时针方向排列 (内环按顺时针), 即  $S = \{ S_1, S_2, \dots, S_{m+n} \} = \{ T_1, T_2, \dots, T_m \} \cup \{ C_1, C_2, \dots, C_n \}$ . 这样, 由三角片和曲线片组成的

链  $\mu = \sum_{i=1}^{m+n} \mu_i S_i$ , 称为扩展简单链 (简单链的定义见文献[9-10]).

下面我们都采用这种方式对扩展多边形进行统一表示. 由此, 本文所研究的扩展多边形的表示方法就与文献[6]中全部为直线边的普通多边形完全一致了. 由定义 5, 图 1 所示的扩展多边形所对应的扩展简单链可以表示为  $\mu = C_1 + T_1 - C_2 - T_2 + T_3 + C_3 + T_4$ .

定义 6. 给定扩展简单链  $\mu$ , 定义特征函数  $f: R^d \rightarrow Z$ ,  $f(Q) = \sum_{Q \in S_i} \mu_i$ . 也就是说, 对坐标平面内的每一个点, 函数的值为包含它的三角片或曲线片的系数和.

定义 7. 给定扩展简单链  $\mu$ , 定义其对应的几何实体  $CP = \{ Q \in R^d / f(Q) > 0 \}$ .

定理 1.  $CP$  是由  $n$  条直线边或曲线边组成的扩展多边形, 其边集为  $\{ s_1, s_2, \dots, s_n \}$ . 取其中的一个元素  $s_i$  与原点  $O$  构成三角片或曲线片, 设为  $S_i$ , 则有  $CP = \bigcup_{i=1}^n S_i$ , 其中  $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i S_i$ .

完全由直线边构成的普通多边形的定理证明见文献[9]. 下面讨论加入曲线边后扩展多边形的情况.

将问题分为两种情况进行证明. 由于  $CP$  和  $CP$  都有闭合边界, 因此首先讨论位于  $CP$  内部的点在  $CP$  中的包含情况.

设  $Q$  是位于扩展多边形  $CP$  内部的点,  $r$  是一条从原点引出并通过  $Q$  点的射线. 有以下两种情况:

(1) 射线不经过  $CP$  的任何顶点. 由于  $Q$  点在扩展多边形内部, 因此射线通过  $Q$  点之后将与  $CP$  的奇数条边相交 (根据定义 2 中的处理, 射线与曲线边也只相交一次). 也就是说,  $Q$  点属于奇数个三角片和曲线片, 设为  $2k+1$ . 并且每一次相交都意味着从实体的内部穿出到它的外部, 反之亦然. 其中的  $k$  个三角片或曲线片的系数为负, 另外  $k+1$  个为正. 故有  $f(Q) = k+1 - k = 1$ . 因此, 由定义 7 可知,  $Q$  点也在  $CP$  所对应的实体内.

(2) 射线经过  $CP$  的某些顶点. 这时, 在与  $Q$  点

相邻的各点中, 必然存在与第 1 种情况相符的点  $Q$ . 也就是说,  $Q$  是一个由  $\mu$  定义的实体的积累点. 同时, 又由于该操作是正则的, 因此  $Q$  点也属于  $CP$  (称位于有封闭边界的扩展多边形  $CP$  内部和边界上的点为它的积累点).

下面证明位于  $CP$  外部的点也不在  $CP$  中. 设  $Q$  是位于扩展多边形  $CP$  外部的点,  $r$  是一条从原点引出并通过  $Q$  点的射线. 有以下两种情况:

(3) 射线不经过  $CP$  的任何顶点. 由于  $Q$  点在扩展多边形外部, 因此射线通过  $Q$  点之后将与  $CP$  的偶数条边相交. 也就是说,  $Q$  点属于偶数个三角片和曲线片, 设为  $2k$  ( $k$  可能为 0). 并且每一次相交都意味着从实体的内部穿出到它的外部, 反之亦然. 因此, 其中的  $k$  个三角片或曲线片的系数为负, 另外  $k$  个为正. 故有  $f(Q) = k - k = 0$ . 因此, 由定义 7 可知,  $Q$  点也不在  $CP$  所对应的实体内.

(4) 射线经过  $CP$  的某些顶点. 这时, 在与  $Q$  点相邻的各点中, 必然存在与第 3 种中情况相符的点  $Q$ . 也就是说,  $Q$  不在由  $\mu$  定义的实体的闭包内. 同时, 又由于该操作是正则的, 因此  $Q$  点也不属于  $CP$ .

由此可见, 加入曲线边后的扩展多边形的证明方法与普通多边形完全一样. 事实上, 我们可以将曲线边离散为若干长度很小的直线边, 这时扩展多边形就转化为普通多边形, 便可直接使用原来的证明. 本文中定理 2 和定理 3 的证明方法也与扩展前的普通多边形的相应定理的证明方法完全一致. 请参看文献[6,9]就可很容易得到相应的证明.

定义 8. 给定三角片或者曲线片  $S_1 = OQ_1Q_2$ ,  $S_2 = OQ_1Q_2$ , 我们称  $S_1$  从属于  $S_2$  或者  $S_2$  包含  $S_1$  ( $S_1 \triangleleft S_2$ ), 当且仅当  $S_1 = S_2$ , 或在  $S_1$  的非原边  $Q_1Q_2$  上存在一点  $Q$ ,  $Q$  在  $S_2$  的内部. 若非原边  $Q_1Q_2$  全部在  $S_2$  的内部, 称  $S_1$  完全从属于  $S_2$ .

在图 1 中, 由定义 8 可得  $c_2 \triangleleft t_1$ ,  $c_2 \triangleleft c_1$ ,  $c_2 \triangleleft t_4$ ,  $c_2 \triangleleft c_3$ ,  $t_2 \triangleleft t_3$ .

判断两三角片从属关系的方法见文献[11-12], 加入曲线片后的方法基本相同, 唯一的区别就是可能需要进行点和带曲线边的多边形的包容测试, 相关算法见文献[8].

定义 9.  $CP$  是扩展多边形,  $\{ S_i | i = 1, 2, \dots, n \}$  是其三角片和曲线片的集合. 由关系  $\triangleleft$  将集合中的元素从大到小排序, 称  $level(S_i)$  为  $S_i$  的等级 (level). 若某一个  $S_i$  所从属的三角片或曲线片的  $level$  值最大

为  $n$ , 则其  $level$  值为  $n + 1$ ; 当其不从属于任何其他三角片或曲线片时, 等级为 1.

由定义 9 可得, 图 1 中各三角片和曲线片的等级为  $level(c_1) = level(t_1) = level(t_3) = level(c_3) = 1$ ,  $level(c_2) = level(t_2) = 2$ .

**定义 10.**  $CP$  是扩展多边形,  $\{S_i | i = 1, 2, \dots, n\}$  是其三角片和曲线片的集合. 称所有等级为  $k$  的三角片和曲线片的集合为扩展多边形的第  $k$  层(layer  $k$ ).

在图 1 中我们可以很清楚地看到各层所包含的三角片和曲线片.

### 2.2 扩展多边形布尔运算的相关定理

**定理 2.** 给定两个独立的扩展多边形  $CP_1$  和  $CP_2$ ,  $P_1 = \bigcup_{i=1}^m S_i$  和  $P_2 = \bigcup_{j=1}^n U_j$  分别为它们所对应的扩展简单链, 则求交之后的扩展多边形  $CP_{P_1 \cap P_2} = CP_{P_1} \cap CP_{P_2}$  的扩展简单链为

$$P_1 \cap P_2 = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^n S_i \cap U_j \text{ Reg}(S_i \cap U_j).$$

完全由直线边构成的普通多边形的相应定理的证明见文献[9]. 加入曲线边后的证明方法与扩展前完全一致.

利用定理 2, 我们可将扩展多边形的交运算简化为各三角片和曲线片之间的交运算. 如图 3 所示, 图 3 a 中的三角片  $S_3$  和曲线片  $U_2$  求交后分解成扩展简单链, 可表示为  $\text{Reg}(S_3 \cap U_2) = U_{22} +$

$S_{32}$ , 即图 3 b 中的阴影部分.

设  $S_i$  和  $U_j$  分别为两个独立的扩展多边形  $CP_1$  和  $CP_2$  的三角片或曲线片, 由定理 2 可得它们的相交区域  $\text{Reg}(S_i \cap U_j)$  的表达式, 其非原边(即  $S_i \cap U_j$  的边界)是  $S_i$  和  $U_j$  中的部分线段或曲线. 特别是当  $S_i$  和  $U_j$  的非原边之间有交点时, 其相交区域的原边是由交点分割的子边, 这种情况如图 3 所示. 因此, 在做两个扩展多边形的求交运算时, 必须首先求出它们各边之间的所有交点, 在交点处对其进行分割, 形成新的边, 从而构成新的子边集合, 并重新构造扩展简单链. 在这个由子边作为非原边的扩展简单链的集合里, 可以求出其各元素的等级以及集合中各层所包含的元素. 通过分解, 边的个数将会增加, 我们认为是增加了新的边. 通过上述分解, 两个多边形求交的工作将转化为确定新的子边集合中哪些边是结果集合中的元素. 所求相交区域的边界将由两个扩展多边形的子边集合的部分边构成. 因此, 求交之后的扩展多边形  $CP_1 \cap CP_2$  所对应的扩展简单链则肯定是由  $CP_1$  和  $CP_2$  的扩展简单链的一部分构成.

分别给定两个扩展多边形(各边已由交点分割)的三角片或曲线片  $S_i$  和  $U_j$ , 对每一项  $\text{Reg}(S_i \cap U_j)$  需要确定哪一个将出现在结果链中, 这将依赖于它们之间的从属关系:

- (1) 若  $S_i$  和  $U_j$  之间不存在从属关系, 即  $S_i \cap U_j = \emptyset$ , 则  $\text{Reg}(S_i \cap U_j) = \emptyset$ ;
- (2) 若  $S_i \triangleleft U_j$  ( $U_j \triangleleft S_i$  时类似), 即  $S_i \cap U_j \subseteq S_i$ , 则  $\text{Reg}(S_i \cap U_j) \subseteq S_i$ . 由定理 2 可知,  $S_i$  在结果扩展多边形的简单链中出现时, 其系数为  $S_i$  和  $U_j$  的系数的乘积.
- (3) 若  $S_i$  同时从属于若干个不同的三角片或曲线片, 则其将以不同的系数在最终的简单链中出现.

由此可见, 若  $S_i$  同时从属于不同的三角片或曲线片, 它在结果多边形的简单链中也将出现多次, 但每次出现时的系数不同 (+1, -1, 0), 从而  $S_i$  最终的系数将是这些系数的和; 如果它们在不同的层次中, 则求和的结果也应在集合  $\{+1, -1, 0\}$  中. 在经过最初的交点分解后,  $S_i$  可能从属于同一层的多个三角片或曲线片, 造成重复计算. 为了避免发生这种情况, 我们有下面的定义.

**定义 11.**  $H_l(S_i, CP_2) = \{U_j \in CP_2 | S_i \triangleleft U_j \text{ and } level(U_j) = l\}$ , 即扩展多边形  $CP_2$  中第  $l$  层所有包含  $S_i$  的三角片或曲线片所构成的集合.

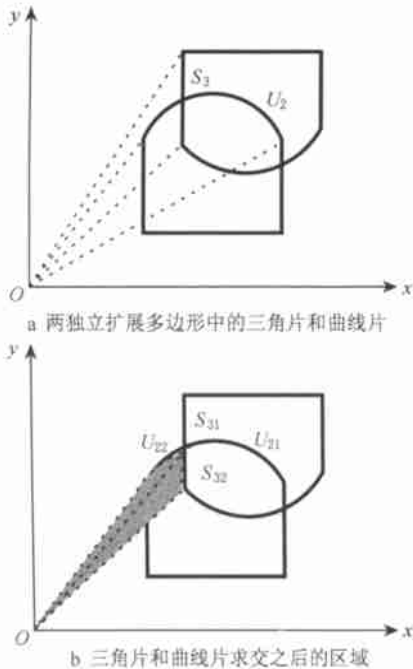


图 3 三角片和曲线片的相交区域

为每一个三角片或曲线片定义这个集合的目的是为了避免求系数和时的重复运算. 在定理 3, 也是本文最重要的一个定理中, 我们将用到这个集合的基(集合中的元素的个数).

**定理 3.** 设  $CP_1, CP_2$  是两个独立的扩展多边形,  $P_1 = \sum_{i=1}^m iS_i$  和  $P_2 = \sum_{j=1}^n jU_j$  分别为它们所对应的扩展简单链, 其中的三角片和曲线片的非原边由经交点分割后的子边构成; 则求交之后的扩展多边形  $CP_{P_1 \cdot P_2} = CP_1 \cdot CP_2$  所对应的扩展简单链为

$$P_{P_1 \cdot P_2} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n i \cdot \text{Reg}(S_i \cdot U_j) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n kR_k,$$

其中,

$$kR_k = \begin{cases} \frac{i \cdot j}{\text{card}(H_l(S_i, CP_2))}, S_i \triangleleft U_j, l = \text{level}(U_j) \\ \frac{i \cdot j}{\text{card}(H_l(U_j, CP_1))}, U_j \triangleleft S_i, l = \text{level}(S_i) \\ 0, & S_i \text{ 和 } U_j \text{ 之间无从属关系} \end{cases}$$

全部为直线边的普通多边形的相关定理的证明见文献[6]. 显然, 在对扩展多边形采用了与普通多边形完全一致的表示方法之后, 定理的证明也完全一致.

由定理 3 的结果, 我们可以很容易地得出计算扩展多边形的并和差的两个重要的推论.

**推论 1.** 设  $CP_1$  和  $CP_2$  是两个独立的扩展多边形,  $P_1 = \sum_{i=1}^m iS_i$  和  $P_2 = \sum_{j=1}^n jU_j$  分别为与它们相关的扩展简单链, 则对  $CP_1, CP_2$  做并运算后得到的扩展多边形  $P_{CP_1 \cup CP_2} = CP_1 \cup CP_2$  所对应的扩展简单链为

$$P_{CP_1 \cup CP_2} = \sum_{i=1}^m iS_i + \sum_{j=1}^n jU_j - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n kR_k$$

**推论 2.** 设  $CP_1$  和  $CP_2$  是两个独立的扩展多边形,  $P_1 = \sum_{i=1}^m iS_i$  和  $P_2 = \sum_{j=1}^n jU_j$  分别为与它们相关的扩展简单链, 则对  $CP_1, CP_2$  做差运算得到的扩展多边形  $P_{CP_1 - CP_2} = CP_1 - CP_2$  所对应的扩展简单链为

$$P_{P_1 - P_2} = \sum_{i=1}^m iS_i - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n kR_k.$$

推论 1, 2 的相关证明见文献[9].

### 3 算法流程

虽然我们的理论比较复杂, 但是利用它来进行

扩展多边形布尔运算的算法接口却非常简单. 首先给出求交运算的算法, 求并和求差的算法可以从求交算法简单的推出.

对两个扩展多边形进行求交运算的步骤如下:

Step1. 首先, 对各曲线边按定义 2 给出的方法进行分割, 形成新的曲线边, 重新构造曲线片; 然后, 求出两扩展多边形各非原边之间的交点<sup>[13]</sup>, 并进行分割. 这样, 所有的边就都呈逆时针方向排列且两两之间最多只有一个交点. 时间复杂度为  $O(n \log(n))$ .

Step2. 构造两扩展多边形相关的扩展简单链, 计算各三角片和曲线片所处的层. 由定义 9 可知, 系数为正的三角片或曲线片的等级为奇数, 系数为负的等级则为偶数<sup>[6]</sup>. 因此, 可以利用扩展多边形的从属关系矩阵来进行计算<sup>[6]</sup>. 矩阵的行为系数为正的三角片或曲线片, 列是系数为负的三角片或曲线片. 这样, 只要遍历这个矩阵就可以计算出扩展简单链中每一个三角片或曲线片的等级. 复杂度为  $O(n^2)$ .

Step3. 利用定理 3 计算扩展多边形各三角片和曲线片是否存在于求交之后的扩展简单链中. 对每一个三角片或曲线片, 计算它与另外一个扩展多边形各三角片和曲线片之间的从属关系. 例如, 若  $S_i \triangleleft U_j$ , 并且尚未检测到  $S_i$  从属于  $U_j$  所在层的其他三角片或曲线片, 则以  $i \cdot j$  作为  $S_i$  的系数将其加入到结果扩展简单链中; 若已经检测到  $S_i$  从属于  $U_j$  所在层的其他三角片或曲线片, 则不做任何操作. 这样,  $S_i$  就可能以 +1 或 -1 作为系数在结果扩展简单链中出现多次, 而其最终的系数则为所有这些系数的和, 且都在集合  $\{+1, -1, 0\}$  中. 保留系数为 +1 和 -1 的三角片和曲线片的非原边作为结果扩展多边形的边, 便完成了求交运算. 其时间复杂度为  $O(n^2)$ .

本文算法总的时间复杂度为  $O(n^2)$ , 效率很高, 详细分析见文献[6].

由推论 1 可知, 并运算是从两个扩展多边形所有三角片和曲线片的集合中减去求交所得的结果扩展多边形中的三角片和曲线片. 所以, 只要用两扩展多边形各三角片和曲线片原始的系数减去求交之后的系数, 就可以在交运算的基础上完成扩展多边形的并运算.

同理, 由推论 2, 差运算  $CP_1 - CP_2$  是从扩展多边形  $CP_1$  所有三角片和曲线片的集合中, 减去求交后的结果扩展多边形中的三角片和曲线片. 因此, 只要用  $CP_1$  各三角片和曲线片原始的系数减去求交之后的系数, 并将求交之后  $CP_2$  各三角片和曲线片的系数取反, 就可以在交运算的基础上完成扩展多边形的差运算.

### 4 算法应用举例

下面给出应用本文算法进行扩展多边形布尔运

算的一个实例. 图 4 所示为两个初始的扩展多边形, 其中  $CP_2$  包含一个内环. 按照第 3 节的算法进行计算, 首先求两个扩展多边形的交.

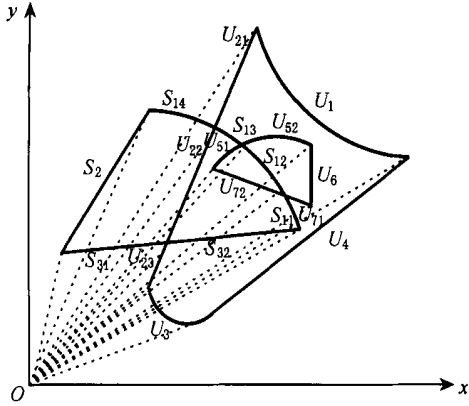


图 4 初始的扩展多边形

Step1. 多边形分割. 对两扩展多边形进行曲线分割和交点分割, 以新的边作为非原边构造相关的扩展简单链为

$$CP_1 = S_{11} + S_{12} + S_{13} + S_{14} + S_2 - S_{31} - S_{32},$$

$$CP_2 = U_1 - U_{21} - U_{22} - U_{23} - U_3 + U_4 -$$

$$U_{51} - U_{52} - U_6 + U_{71} + U_{72}.$$

Step2. 层次计算. 分别计算两扩展多边形各层所包含的三角片和曲线片.

$$CP_1 : \text{Layer 1} : S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{14}, S_2; \text{Layer 2} : S_{31}, S_{32}.$$

$$CP_2 : \text{Layer 1} : U_1, U_4; \text{Layer 2} : U_{21}, U_{51}, U_{52}, U_6,$$

$$\text{Layer 3} : U_{71}, U_{72}; \text{Layer 4} : U_{22}, U_{23}, U_3.$$

各三角片和曲线片所处层数的计算方法见文献[12].

Step3. 系数计算. 计算结果扩展简单链中各三角片和曲线片的系数, 结果如表 1 所示.

表 1 中的行、列分别对应扩展多边形  $CP_1$  和  $CP_2$  的三角片和曲线片, 括号里的数字表示该三角片或曲线片所处的层.  $LevelsDom(S_i)$  是一个记录包含  $S_i$  的三角片和曲线片所处层数的链表,  $Coefficient(S_i)$  表示三角片或曲线片  $S_i$  的系数. 表 1 中的元素按下述方法加入:

a. 若  $U_j$  从属于  $S_i$ , 则在第  $j$  行第  $i$  列加入元素  $(i, j, 0)$ , 并在链表  $LevelsDom(U_j)$  中加入  $S_i$  所处的层数, 以便在计算最终的结果时可不再考虑  $U_j$  所可能从属的  $CP_1$  中的其他的三角片和曲线片;

b. 若  $S_i$  从属于  $U_j$ , 则在第  $j$  行第  $i$  列加入元素  $(0, i, j)$ , 并在链表  $LevelsDom(S_i)$  中加入  $U_j$  所处的层数, 以便在计算最终的结果时可不再考虑  $S_i$  所可能从属的  $CP_2$  中的其他的三角片和曲线片;

c. 若  $S_i$  和  $U_j$  无从属关系, 则在第  $j$  行第  $i$  列加入元素  $(0, 0)$ ;

d. 若  $S_i$  和  $U_j$  有从属关系, 例如  $S_i \triangleleft U_j$ , 但  $U_j$  所处的层数已在  $LevelsDom(S_i)$  中, 则在元素  $(0, i, j)$  中的  $i, j$  后面打上一个 \*, 在求最后的系数和时忽略不计.

表 1 对图 4 中的两个扩展多边形应用求交算法所得结果

	$CP_1$	$S_{11}(1)$	$S_{12}(1)$	$S_{13}(1)$	$S_{14}(1)$	$S_2(1)$	$S_{31}(2)$	$S_{32}(2)$	$Coefficient(U_j)$
$CP_2$	$\frac{LevelsDom(S_i)}{LevelsDom(U_j)}$	1, 2, 3	1, 2	1	1, 2		1, 2, 4, 3	1, 2, 3	
$U_1(1)$		(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(0, - 1)	(0, - 1)	0
$U_{21}(2)$		(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, - 1)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 0)	0
$U_{22}(4)$	1	(0, 0)	(- 1, 0)	(- 1 *, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(0, 0)	- 1
$U_{23}(4)$	1, 2	(0, 0)	(- 1, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(1, 0)	0
$U_3(4)$	1, 2	(- 1, 0)	(- 1 *, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(1, 0)	0
$U_4(1)$		(0, 1 *)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, - 1 *)	0
$U_{51}(2)$	1	(0, 0)	(0, 0)	(- 1, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 1 *)	(0, 0)	- 1
$U_{52}(2)$		(0, 0)	(0, - 1)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 1 *)	(0, 1)	0
$U_6(2)$		(0, - 1)	(0, - 1 *)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 1 *)	0
$U_{71}(3)$		(0, 1)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, - 1)	0
$U_{72}(3)$	1	(0, 0)	(1, 0)	(1 *, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, - 1)	(0, - 1 *)	1
$Coefficient(S_i)$		1	0	1	0	0	0	- 1	

Step4. 结果提取. 由表 1 中的计算结果, 取出系数和为 +1 和 -1 的三角片和曲线片, 可得求交之后的扩展多边形所对应的扩展简单链为  $CP_1 \cap CP_2 = S_{11} + U_{72} - U_{51} + S_{13} - U_{22} - S_{32}$ , 对应的扩展多边形如图 5 所示的阴影部分.

同理可得求并和求差之后的扩展多边形所对应的扩展简单链分别为  $CP_1 \cup CP_2 = S_{14} + S_2 - S_{31} - U_{23} - U_3 + U_4 + U_1 - U_{21} + S_{12} - U_{52} - U_6 + U_{71}$  (对应的扩展多边形如图 6 所示的阴影部分);

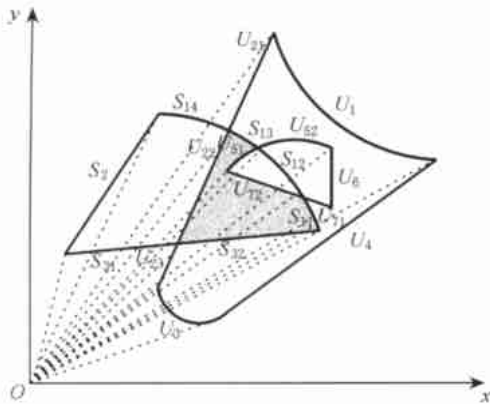


图 5 求交之后的扩展多边形

$CP_1 - CP_2 = S_{14} + S_2 - S_{31} + U_{22} + S_{12} + U_{51} + U_{72}$  (对应的扩展多边形如图 7 所示的阴影部分).

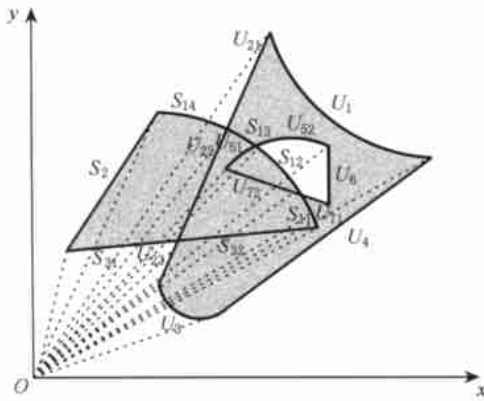


图 6 求并之后的扩展多边形

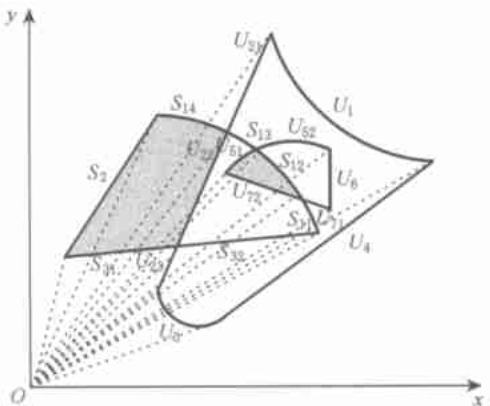


图 7 求差之后的扩展多边形

### 5 算法分析与比较

本文算法基于简单链<sup>[9]</sup>的概念,构造了一个完整的数学模型,使带曲线边的多边形有了统一的数学表示形式.在进行布尔运算的时候,不必再考虑各种特殊情况,大大提高了计算效率.也就是说,本文算法是一种形式化的方法,无论是实体的表示还

是中间的运算过程都有具体而统一的数学表示模型,与其他无论是基于边界<sup>[3,14]</sup>还是基于扫描线<sup>[15]</sup>的非形式化算法都有着本质的区别.以文献[15]中很经典的二维布尔运算算法为例(该算法同样适用于带曲线边的多边形),由于它没有统一的数学表示模型,因此在计算中需要考虑许多特殊情况,使程序变得复杂,复杂度也较高,为  $O(n^2 \log(n))$ . 本文算法则对任何情况都可以采用统一的方法进行计算,这在很大程度上提高了程序的效率,构造完整数学模型的重要性也可见一斑.

### 6 结论与展望

本文在文献[6]工作的基础上进行扩展,提出了一种带曲线边的平面扩展简单多边形的布尔运算的新算法.该算法效率高、鲁棒性强,特别是对一些特殊情况的处理具有很好的稳定性.另外,代码编写也比较简单,算法的核心部分仅有 400 行左右,具有很高的实用价值,将来甚至可以考虑进行硬件化.目前,本文研究的扩展多边形的曲线边仅限于圆锥曲线,下一步我们准备将其扩展到自由曲线,并争取实现三维实体的布尔运算算法.

**致谢** 本文研究得到刘晓强老师的悉心指导和帮助,刘玉身、彭宇、岳利强、严冬明、陈小雕、张松海等同学在本文撰写过程中也提出了许多的建议,在此表示感谢!

### 参 考 文 献

- [1] Preparata F P, Shamos M I. Computational Geometry: An Introduction [M]. Berlin: Springer, 1985
- [2] O'Rourke J. Computational Geometry in C [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985
- [3] Wu Yunxing. Polygon Boolean operation based on edges recognition algorithm [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 1994, 6(4): 260 ~ 265 (in Chinese) (武运兴. 基于边界识别的多边形的布尔运算[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 1994, 6(4): 260 ~ 265)
- [4] Zhu Renzhi, Meng Weihua. A new algorithm on one-dimension Boolean operation in terms of geometric modeling [J]. Journal of Engineering Graphics, 1994, (1): 10 ~ 14 (in Chinese) (朱仁芝, 孟卫华. 一种用于几何造型的一维布尔运算新算法[J]. 工程图学学报, 1994, (1): 10 ~ 14)

(下转第 1144 页)

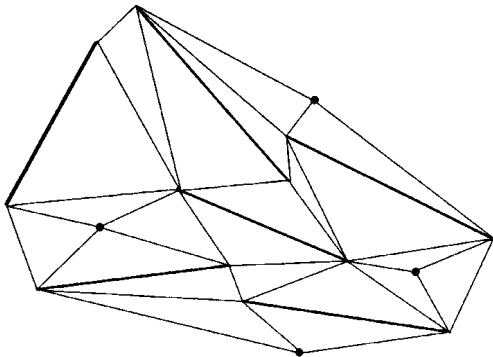


图3 例1

算法得到该点线集的三角剖分,如图4所示.其中粗线是给定的线段,细线为增加的连线.

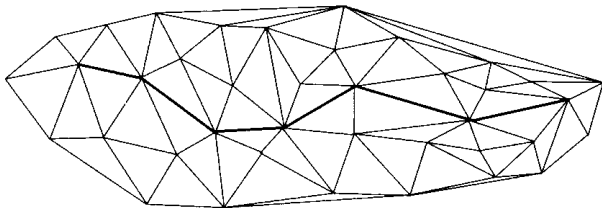


图4 例2

## 6 结束语

本文利用平面扫描思想设计求解平面散乱点线集三角剖分问题的算法,其优点是时间复杂性低,易于编程,而且对大输入量数据  $N$  不易出错. 本文算法为平面散乱点线集三角剖分问题的解决提供了一条新的途径.

## 参 考 文 献

- [1] Lo S H. Delaunay triangulation of non-convex planar domains [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1989, 28(11): 2695 ~ 2707
- [2] Zhou Peide. Algorithms for the triangulation of plane line-segment sets [J]. Computer Engineering & Science, 2003, 25(1): 20 ~ 22 (in Chinese)  
(周培德. 平面线段集三角剖分的算法[J]. 计算机工程与科学, 2003, 25(1): 20 ~ 22)
- [3] Zhou Peide. Computational Geometry [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000 (in Chinese)  
(周培德. 计算几何[M]. 北京:清华大学出版社, 2000)

### (上接第 1140 页)

- [5] Zhou Peide. Computational Geometry-The Analysis of the Algorithms and Design [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2000 (in Chinese)  
(周培德. 计算几何——算法分析与设计[M]. 北京:清华大学出版社, 2000)
- [6] Rivero M, Feito F R. Boolean operations on general planar polygons [J]. Computer & Graphics, 2000, 24(6): 881 ~ 896
- [7] Whitney H. Geometric Integration Theory [M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957
- [8] Ruiz J, de Miras, Feito F R. Inclusion test for curved-edged polygons [J]. Computers & Graphics, 1997, 21(6): 815 ~ 824
- [9] Feito F, Rivero M L. Geometric modeling based on simplicial chains [J]. Computers & Graphics, 1998, 22(5): 611 ~ 619
- [10] Feito F, Rivero M L, Rueda A J. Boolean representations of general planar polygons [A]. In: Proceedings of the 7th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Interactive Digital Media, Pilsen, 1999. 87 ~ 92
- [11] Feito F, Torres J C, Urena A. Orientation, simplicity and inclusion test for planar polygons [J]. Computer & Graphics, 1995, 19(14): 595 ~ 600
- [12] Feito F, Rivero M L, Rueda A J. Calculation of subordinations [R]. Spain: Jaén University, 1998
- [13] H Person. NC machining of arbitrarily shaped pockets [J]. Computer-Aided Design, 1978, 10(3): 169 ~ 174
- [14] Ramamurthy Rajesh, Farouki Rida T. Voronoi diagram and medial axis algorithm for planar domains with curved boundaries—II: Detailed algorithm description [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1999, 102(2): 253 ~ 277
- [15] Sun Jianguang. Computer Graphics [M]. 3rd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2000 (in Chinese)  
(孙家广. 计算机图形学[M]. 第3版. 北京:清华大学出版社, 2000)