第2期第23卷　　浙　江　大　学　学　报　（自然科学版）　　Vol. 23 №2,
1989年3月　　Journal of Zhejiang University (Natural Science)　　March, 1989

用二次最优控制推导Kalman滤波器和最优插值器

王飞跃

（力学系）

提　　要

本文通过最小二乘拟合方法，将最优估计问题转换成二次最优控制问题，然后用统一的方式导出Kalman-Bucy最优滤波器和Ranch-Tung-Striebel最优插值器等，同时还给出最优插值器的一种新形式。

关键词：二次最优控制，滤波器，插值器.

0　引　　言

Kalman-Bucy滤波器和最优插值器在随机控制理论中的重要作用是比较熟悉的。在最优滤波器的最初推导中，Kalman，Bucy采用了正交投影定理[1,2]，对许多工程设计人员来说，这种推导方法比较复杂，要有一定的数学基础才能掌握，文献[3,4]直接假设滤波器是线性的，对离散情况下导出了Kalman-Bucy滤波方程，其过程简单得多，然后取极限得到连续时间的Kalman-Bucy滤波方到。其中文献[4]的推导要比文献[3]好一些，文献[4]仅假设滤波方程是线性的，而文献[3]则一开始就假设滤波方程是预测-校正型。在本文附录中，我们表明，文献[4]中的方法可直接推广到连续时间，而毋需极限过程。

另一种推导Kalman-Bucy滤波器和最优插值器的方法是采用最小二乘拟合方法，它可以看作是Gauss发明最小二乘法时的原始思想的直接推广[5]。Lee在其博士论文中首先用这种方法导出离散情况下的Kalman-Bucy滤波器[6]。这种方法的优点在于：将最优估计问题转换成经典的二次最优控制问题，从而可以用熟知的变分方法解决估计问题，这种方法可以直接推广到非线性估计问题中去，从而可以用众多的近似最优控制方法解决非线性估计问题。

在文献[6]中，Lee仅对离散时间系统用数学归纳法导出了Kalman-Bucy滤波器，但其证明显然是不完全的，因为它只对 $i=0$，1，2时的情况（见后面第三节），证明了用最小二乘拟合法得到的滤波恰好是Kalman-Bucy滤波，然后直接认为一般情况下的滤波也是Kalman-

本文于1987年3月11日收到

Bucy滤波，这是因为已知Kalman-Bucy方程的缘故。实际上，如按Lee的方法证明这一问题，首先得解一个最优插值问题，但最优插值的解包含了最优滤波的解，因此陷入循环。而且，Lee的方法显然不适合连续时间的情况。本文中，我们通过求解二组两点边值问题的微分方程，首先求出最优滤波问题的解，证明它正是Kalman-Bucy滤波，然后推出最优插值问题之解。这样，我们就用统一的方式证明了Kalman-Bucy滤波器和其它一些最优插值，可以用经典的确定性二次最优控制理论直接导出。

本文的推导是针对时不变系统的，但全部结论对时变系统仍然成立。

1　连续时间系统

设所考虑的线性随机系统为

$$\dot{x}=Fx+Bu+Gw \tag{1}$$

$$y=Hx+v \tag{2}$$

其中$x\in R^n$，$u\in R^m$，y，$v\in R^p$，$w\in R^k$，而F，B，G，H是具有适当维数的系统矩阵，控制$u(t)$假定为已知，过程的随机特性为：

$$\begin{aligned}&E\{x(t_0)\}=x_0,\ \operatorname{cov}\{x(t_0)\}=P_0,\ P_0>0\\&E\{v(t)\}=0,\ \operatorname{cov}\{V(t)\}=R\delta(t-\tau),\ R>0\\&E\{w(t)\}=0,\ \operatorname{cov}\{w(t)\}=Q\delta(t-\tau),\ Q>0\\&E\{x(0)v(t)^T\}=0,\ E\{v(t)w(\tau)^T\}=0,\ E\{w(t)x(0)^T\}=0\end{aligned} \tag{3}$$

式中$\delta(t-\tau)$是Dirac函数，$(\quad)^T$表示$(\quad)$的转置。

记至时间t时的全部测量为$Y=\{y(\tau)|t_0\leqslant\tau\leqslant t\}$，相应的状态估计为$\hat{x}(\tau|t)$，$t_0\leqslant\tau\leqslant t$，我们的目的是按最小二乘拟合方法求出滤波$\hat{x}(t|t)$和插值$\hat{x}(\tau|t)$的方程。

按照最小二乘法原理，此时，方程误差[6]是$J(t)=\frac{1}{2}\|\hat{x}(t_0|t)-x_0\|^2_{P_0^{-1}}$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}[\|y-H\hat{x}(\tau|t)\|^2_{R^{-1}}+\|\hat{w}(\tau|t)\|^2_{Q^{-1}}]d\tau \tag{4}$$

同时，在给定测量Y_t下，$\hat{x}(\tau|t)$满足约束方程

$$\dot{\hat{x}}(\tau|t)=F\hat{x}(\tau|t)+Bu+G\hat{w}(\tau|t) \tag{5}$$

其中导数是对于τ而取的。

至此，估计问题已转换成一个以$\hat{w}(\tau|t)$为控制函数，$J(t)$为指标的典型确定性二次最优控制问题，从而，我们就可以用变分方法来解这个问题。

为放松约束(5)式，引入Lagrange乘子 $\lambda(\tau)$，我们建立广义指标为

$$J^*(t)=J(t)-\int_{t_0}^{t}\lambda^T[\dot{\hat{x}}(\tau|t)-F\hat{x}(\tau|t)-G\hat{w}(\tau|t)-Bu]d\tau \tag{6}$$

经简单的数学运算可得$J^*(t)$的一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta J^*(t)=&\delta\hat{x}(t_0|t)P_0^{-1}[\hat{x}(t_0|t)-x_0]-\delta\hat{x}^T(\tau|t)\lambda(\tau)\big|_{t_0}^{t}\\&+\int_{t_0}^{t}\{\delta\hat{x}(\tau|t)^T[\dot{\lambda}+F^T\lambda-H^TR^{-1}(y-H\hat{x}(\tau|t))]\\&+\delta\lambda^T[-\dot{\hat{x}}(\tau|t)+F\hat{x}(\tau|t)+G\hat{w}(\tau|t)+Bu]\\&+\delta\hat{w}(\tau|t)^T[Q^{-1}\hat{w}(\tau|t)+G^T\lambda]\}d\tau\end{aligned}$$

由于$\delta J^*(t)=0$，由变分基本引理我们得到下列方程组

$$\hat{x}(t_0|t)=x_0-P_0\lambda(t_0),\quad \lambda(t)=0$$

$$\hat{w}(\tau|t)=-QG^T\lambda(\tau)$$

$$\dot{\hat{x}}(\tau|t)=F\hat{x}(\tau|t)+G\hat{w}(\tau|t)+Bu(\tau)$$

$$\dot{\lambda}(\tau)=-F^T\lambda(\tau)+H^TR^{-1}[y-H\hat{x}(\tau|t)]$$

整理，得

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}(\tau|t)=F\hat{x}(\tau|t)-GQG^T\lambda(\tau)+Bu(\tau)\\\dot{\lambda}(\tau)=-F^T\lambda(\tau)+H^TR^{-1}[y-H\hat{x}(\tau|t)]\end{cases} \tag{7}$$

$$\hat{x}(t_0|t)=x_0-P_0\lambda(t_0),\lambda(t)=0 \tag{8}$$

方程(7～8)即构成了插值问题的方程式，为了消去Lagrange乘子 $\lambda(\tau)$，求出滤波和插值的独立方程，我们考虑下列两组微分方程组：

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1=F\xi_1-GQG^T\eta_1+Bu\\\dot{\eta}_1=-F^T\eta_1+H^TR^{-1}(y-H\xi_1)\end{cases}\qquad t_0\leqslant\tau\leqslant t \tag{9}$$

$$\xi_1(t_0)=x_0,\quad \eta_1(t_0)=0 \tag{10}$$

$$\begin{cases}\dot{\xi}_2=F\xi_2-GQG^T\eta_2\\\dot{\eta}_2=-F^T\eta_2-H^TR^{-1}H\xi_2\end{cases}\qquad t_0\leqslant\tau\leqslant t \tag{11}$$

$$\eta_2(t)=-\eta_1(t),\quad \xi_2(t_0)=-P_0\eta_2(t_0) \tag{12}$$

显然

$$\hat{x}(\tau|t)=\xi_1(\tau)+\xi_2(\tau) \tag{13}$$

方程（9～10）和（11～12）分别可看成是（7～8）式的特解和通解，但其真正的意义在于将测量时间 t 与插值所在时刻 τ 分离开来，从而使我们可以得出滤波的方程。

为了得到方程(11)的解，令

$$\xi_2(\tau)=-P(\tau)\eta_2(\tau)$$

其中$P(\tau)$是特定矩阵，带入（11～12）式，我们看到P应满足Riccati方程

$$\dot{P}=FP+PF^T-PH^TR^{-1}HP+GQG^T,\quad P(t_0)=P_0 \tag{14}$$

且

$$\dot{\eta}_2=-(F^T-H^TR^{-1}HP)\eta_2,\quad \eta_2(t)=-\eta_1(t) \tag{15}$$

于是

$$\hat{x}(\tau|t)=\xi_1(\tau)-P(\tau)\eta_2(\tau) \tag{16}$$

特别地，当 $\tau=t$ 时，即有

$$\hat{x}(t|t)=\xi_1(t)-P(t)\eta_2(t)=\xi_1(t)+P(t)\eta_1(t) \tag{17}$$

可见滤波由方程（9～10）的解所唯一确定。由此可推出

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t|t)&=\dot{\xi}_1(t)+\dot{P}\eta_1+P\dot{\eta}_1\\&=F\xi_1-GQG^T\eta_1+Bu+\dot{P}\eta_1+P(-F^T\eta_1+H^TR^{-1}y-H^TR^{-1}H\xi_1)\\&=F\xi_1+PH^TR^{-1}[y-H\xi_1]+Bu+(\dot{P}-PF^T-GQG^T)\eta_1\\&=F\xi_1+PH^TR^{-1}(y-H\xi_1)+Bu+(FP-PH^TR^{-1}HP)\eta_1\\&=F(\xi_1+P\eta_1)+Bu+PH^TR^{-1}[y-H(\xi_1+P\eta_1)]\end{aligned}$$

即

$$\dot{\hat{x}}(t|t)=F\hat{x}(t|t)+Bu+PH^TR^{-1}[y(t)-H\hat{x}(t|t)] \tag{18}$$

且 $x(t_0|t_0)=\xi_1(t_0)+P(t_0)\eta_1(t_0)=x_0$

此即著名的Kalman－Bucy滤波方程式，其方差P由Riccati方程(14)给出。为求出插值方程，利用(17)式我们可将(16)式改写成

$$\hat{x}(\tau|t)=\xi_1(\tau)-P(\tau)\eta_2(\tau)=\xi_1+P(\tau)\eta_1-P(\tau)(\eta_1+\eta_2)$$
$$=\hat{x}(\tau|\tau)-P(\tau)\eta(\tau) \tag{19}$$

其中

$$\eta(\tau)=\eta_1(\tau)+\eta_2(\tau)$$

利用方程（9～12），可以得到$\eta(\tau)$所满足的方程为

$$\dot{\eta}(\tau)=-F^T\eta+H^TR^{-1}HP\eta+H^TR^{-1}[y-H\hat{x}(\tau|\tau)],\quad \eta(t)=0, \tag{20}$$

方程（19～20）已经构成一组插值方程。其中$\eta(\tau)$实际上是Lagrange乘子，就作者所知，以前文献中没有出现过这种形式的插值方程。

下面进一步推出Rauch-Tung-Striebel最优插值器[7]。

由（7）式，η的方程可改写成

$$\dot{\eta}(\tau)=-F^T\eta-H^TR^{-1}H\hat{x}(\tau|t)+H^TR^{-1}y(t)$$

于是

$$\dot{\hat{x}}(\tau|\tau)=F\hat{x}(\tau|\tau)+PH^TR^{-1}[y-H\hat{x}(\tau|\tau)]+Bu$$
$$=F\hat{x}(\tau|\tau)-PH^TR^{-1}H\hat{x}(\tau|\tau)+P[\dot{\eta}+F^T\eta+H^TR^{-1}H\hat{x}(\tau|t)]+Bu$$
$$=P\dot{\eta}+F\hat{x}(\tau|\tau)+P[F^T\eta+H^TR^{-1}H(\hat{x}(\tau|t)-\hat{x}(\tau|\tau))]+Bu$$
$$=P\dot{\eta}+F\hat{x}(\tau|\tau)+P[F^T\eta-H^TR^{-1}HP\eta]+Bu$$
$$=P\dot{\eta}+F\hat{x}(\tau|\tau)+(\dot{P}-FP-GQG^T)\eta+Bu$$
$$=\dot{\overline{P\eta}}+F(\hat{x}(\tau|\tau)-P\eta)-GQG^T\eta+Bu$$

其中利用了方程(14)，易知上面最后的等式即为

$$\dot{\hat{x}}(\tau|t)=F\hat{x}(\tau|t)+GQG^TP^{-1}[\hat{x}(\tau|t)-\hat{x}(\tau|\tau)+Bu \tag{21}$$

此即带有控制项的区间固定的Rauch-Tung-Striebel最优插值方程(器)。

利用方程（14，18～21），我们不难求出其它类型的插值方程，如区间固定的双-滤波型插值方程[8]，时滞固定的最优插值方程，以及点固定的最优插值方程[4]等等，这里就不一一赘述。

至此，我们用经典确定性二次最优控制方法，统一地导出了最优滤波器和插值器，下面讨论离散情况。

2 离散时间系统

与连续时间系统对应的离散时间系统为

$$x_{k+1} = \Phi x_k + Bu_k + Pw_k \tag{22}$$

$$y_k = Hx_k + v_k \tag{23}$$

其中各量的意义与(1～2)式中对应量的意义相同。过程的随机特征为

$$\begin{cases} E\{x_0\} = \overline{x}, \ \operatorname{cov}\{x_0\} = \overline{P}_0, \ P_0 > 0 \\ E\{w_k\} = 0, \ \operatorname{cov}\{w_k\} = Q\delta_{ke} \quad Q > 0 \\ E\{v_k\} = 0, \ \operatorname{cov}\{v_k\} = R\delta_{ke} \quad R > 0 \\ E\{x_0 V_k^T\} = 0, \ E\{v_k w_e^T\} = 0, \ E\{w_k x_0^T\} = 0 \end{cases} \tag{24}$$

设至时间 n 时的测量为 $Y_n = \{y(k) | 0 \leqslant k \leqslant n\}$，相应的状态估计为 $\widehat{x}_{i|n}$，$0 \leqslant i \leqslant n$。类似于上节，我们可得对应于估计问题的二次最优控制为

$$\widehat{x}_{i+1|n} = \Phi \widehat{x}_{i|n} + Bu_i + \Gamma \widehat{w}_{i|n} \tag{25}$$

$$J(n) = \frac{1}{2} \| \widehat{x}_{0|n} - \overline{x} \|^2_{P_0^{-1}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left\{ \| y_{i+1} - H\widehat{x}_{i+1|n} \|^2_{R^{-1}} + \| \widehat{w}_{i|n} \|^2_{Q^{-1}} \right\} \tag{26}$$

广之指标为

$$J^*(n) = J(n) - \sum_{i=0}^{n} \lambda_{i+1}^T [\widehat{x}_{i+1|n} - \Phi \widehat{x}_{i|n} - - Bu_i - P\widehat{w}_{i|n}] \tag{27}$$

由 $\delta J^*(n) = 0$，我们得到下列方程

$$\widehat{x}_{0|n} = -\overline{P}_0 \Phi^T \lambda_0 + \overline{x}, \ \lambda_n = 0$$

$$\widehat{w}_{i|n} = -Q\Gamma^T \lambda_i$$

$$\widehat{x}_{i+1|n} = \Phi \widehat{x}_{i|n} + Bu_i + P\widehat{w}_{i|n}$$

$$\lambda_i = \Phi^T \lambda_{i+1} - H^T R^{-1} (y_{i+1} - H\widehat{x}_{i+1|n})$$

整理得

$$\begin{cases} \hat{x}_{i+1|n} = \Phi \hat{x}_{i|n} + Bu_i - \Gamma Q \Gamma^T \lambda_i \\ \lambda_i = \Phi^T \lambda_{i+1} - H^T R^{-1} (y_{i+1} - H \hat{x}_{i+1|n}) \end{cases} \quad (0 \leqslant i \leqslant n) \tag{28}$$

$$\hat{x}_{0|n} = \bar{x} - \bar{P}_0 \Phi^T \lambda_0, \quad \lambda_n = 0 \tag{29}$$

如同下节，考虑下面两组方程

$$\begin{cases} \xi_{i+1}^1 = \Phi \xi_i^1 - \Gamma Q \Gamma^T \eta_i^1 + Bu_i \\ \eta_i^1 = \Phi^T \eta_{i+1}^1 - H^T R^{-1} (y_{i+1} - H \xi_{i+1}^1) \end{cases} \quad (0 \leqslant i \leqslant n) \tag{30}$$

$$\xi_0^1 = \bar{x}, \quad \eta_0^1 = 0 \tag{31}$$

及

$$\begin{cases} \xi_{i+1}^2 = \Phi \xi_i^2 - \Gamma Q \Gamma^T \eta_i^2 \\ \eta_i^2 = \Phi^T \eta_{i+1}^2 + H^T R^{-1} H \xi_{i+1}^2 \end{cases} \quad 0 \leqslant i \leqslant n \tag{32}$$

$$\xi_0^2 = -\bar{P}_0 \Phi^T \eta_0^2, \quad \eta_n^2 = -\eta_n^1 \tag{33}$$

设

$$\xi_i^2 = -P_i \Phi^T \eta_i^2$$

代入（32～33）式，得P_i应满足的方程为

$$\begin{aligned} P_{i+1} &= [P_{i+1|i}^{-1} + H^T R^{-1} H]^{-1} \\ &= P_{i+1|i} - P_{i+1|i} H^T [R + H P_{i+1|i} H^T]^{-1} H P_{i+1|i} \end{aligned} \tag{34}$$

其中

$$P_{i+1|i} = \Phi P_i \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T, \quad P_0 = \bar{P}_0 \tag{35}$$

而

$$\eta_i^2 = \Phi^T \eta_{i+1}^2 - H^T R^{-1} H P_{i+1} \eta_{i+1}^2, \quad \eta_n^2 = -\eta_n^1 \tag{36}$$

因为

$$\hat{x}_{i|n} = \xi_i^2 + \xi_i^1 = \xi_i^1 - P_i \Phi^T \eta_i^2 \tag{37}$$

特别地，当 $i=n$时，得

$$\hat{x}_{n|n} = \xi_n^1 + P_n \Phi^T \eta_n^1 \tag{38}$$

由此

$$\hat{x}_{n+1|n+1}=\xi_{n+1}^{1}+P_{n+1}\Phi^{T}\eta_{n+1}^{1}=\Phi\xi_{n}^{1}+Bu_{n}-\Gamma Q\Gamma^{T}\ \eta_{n}^{1}+P_{n+1}\Phi^{T}\eta_{n+1}^{1}$$

$$=\Phi\hat{x}_{n|n}-P_{n+1|n}\ \eta_{n}^{1}+P_{n+1}\Phi^{T}\eta_{n+1}^{1}+Bu_{n}$$

$$=\Phi\hat{x}_{n|n}-P_{n+1|n}[\Phi^{T}\eta_{n+1}^{1}-H^{T}R^{-1}(y_{n+1}-H\xi_{n+1}^{1})]$$

$$+P_{n+1}\Phi^{T}\eta_{n+1}^{1}+Bu_{n}$$

因为

$$P_{n+1}=P_{n+1|n}-P_{n+1|n}H^{T}R^{-1}HP_{n+1}$$

所以

$$\hat{x}_{n+1|n+1}=\Phi\hat{x}_{n|n}+Bu_{n}+P_{n+1|n}H^{T}R^{-1}(y_{n+1}-H\ \xi_{n+1}^{1})$$

$$-P_{n+1|e}H^{T}R^{-1}HP_{e+1}\Phi^{T}\ \eta_{n+1}^{1}$$

$$=\Phi\hat{x}_{n1|n}+P_{n+1|n}H^{T}R^{-1}\ [y_{n+1}-H\ (\xi_{n+1}^{1}+P_{n+1}\Phi^{T}\eta_{n+1}^{1}]+Bu_{n}$$

$$=\Phi\hat{x}_{n|n}+P_{n+1|n}H^{T}R^{-1}(\ y_{n+1}-H\hat{x}_{n+1|n+1})+Bu_{n}$$

由此

$$(I+P_{n+1|n}H^{T}R^{-1}H)\hat{x}_{n+1|n+1}=\Phi\hat{x}_{n|n}+P_{n+1|n}H^{T}R^{-1}y_{n+1}+Bu_{n}$$

$$=(I+P_{n-1|n}H^{T}R^{-1}H)\Phi\hat{x}_{n|n}+P_{n+1|n}H^{T}R^{-1}\ (y_{n+1}-H\Phi\ \hat{x}_{n|n})$$

$$+Bu_{n}$$

因为上式对一般估计状态成立，即得

$$\hat{x}_{n+1|n+1}=\Phi\hat{x}_{n|n}+P_{n+1}H^{T}R^{-1}(y_{n+1}-H\Phi\hat{x}_{n|n})+P_{n+1}P_{n+1|n}^{-1}Bu_{n}\tag{39}$$

而

$$\hat{x}_{0|0}=\xi_{0}^{1}+P_{0}\Phi^{T}\eta_{0}^{1}=\xi_{0}^{1}=\bar{x}$$

这正是离散情况下的Kalman-Bucy滤波方程。其方差矩阵由(34)、(35)式给出。值得注意的是(39)式中的控制项，其正确的形式由Lee得到，项 $P_{n+1}P_{n+1|n}^{-1}$曾被许多研究者所忽视。

由(37)、(38)式

$$\hat{x}_{i|n}=\xi_{i}^{1}-P_{i}\Phi^{T}\eta_{i}^{2}=\hat{x}_{i|i}-P_{i}\Phi^{T}\eta_{i}\tag{40}$$

其中$\eta_i=\eta_i^1+\eta_i^2$是Lagrange乘子，类似上节，我们可以推出

$$\eta_i=\Phi^T\eta_{i+1}+H^TR^{-1}HP_{i+1}\Phi^T\eta_{i+1}-H^TR^{-1}(y_{i+1}-H\hat{x}_{i+1|i+1}),$$
$$\eta_n=0 \tag{41}$$

进一步还可得到：

$$\eta_i=P_{i+1|i}^{-1}(\Phi\hat{x}_{i|i}+Bu_i-\hat{x}_{i+1|n})$$

于是

$$\hat{x}_{i|n}=\hat{x}_{i|i}-P_i\Phi^TP_{i+1|i}^{-1}(\Phi\hat{x}_{i|i}-\hat{x}_{i+1|n}+Bu_i) \tag{42}$$

此即带控制项的离散情况下的Rauch-Tung-Striebel最优插值方程。而(40～41)式与(19～20)式对应，给出一组新的插值方程。

值得指出的是，不论在连续还是在离散情况，我们都没有假设系统的噪音是正态分布的。

3 讨论

通过测量数据的最小二乘拟合，我们看到，随机系统的最优估计问题可以转换成经典的确定性二次最优控制问题，在线性情况下，我们用这一统一方式推导出了各种最优滤波方程和插值方程。自然可想到，这一方法可以推广到非线性估计问题中去。首先，对非线性估计作一阶近似我们一定能得到线性化的Kalman滤波器和各种插值器。对一般问题，我们可以采用各种次优控制方法，特别是文献[9]中给出的次优控制理论，来解决非线性估计问题。但遗憾的是，这些方法一般不能在线性实行。

目前有人提出用熵（Entropy）作为控制问题的一般最优判据，试图统一智能控制中的各个层次的设计[10]。文献[10]中还给出了最优控制问题以熵的具体形式。这样，将估计问题转化为控制问题，就可以得到对应于估计问题的熵的形式。

参考文献

1 Kalman R A. New Approach fo Linear Filfering and Predictions Problems. Trans. ASME J. Basic Eng., 1960; 82D: 34～35

2 Kalman R, Bucy R. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. Trans. ASME J. Basic Eng., 1961; 8(3D): 95～108

3 Sorenson H W. Advances in control systems. Kalman Filterng Techniques, 1966; 3: 219～289

4 Gelb A. Applied Optimal Estimaton. The MIT Press, 1974

5 Sorenson H W. Least Squares Estimation: From Gauss to Kalman. IEEE Spectrum, July 1970: 63～68

6 Lee R C K. Optimal Estimation, Identification and Control. The MIT Press, Cambridge Mass., 1964
7 Rauch H E, Tung F and Striebel C T. Maximum Likelihood Estimates of Linear Dynamice Systems. AIAA Journal, 1965; 3(8): 1445～1450
8 Fraser D C and Potter J E. The Optimum Linear Smoother as a Combination of Two Optimum Linear Filters.IEEE Trans., Automat. Centry, 1969; 7 (8): 387～390
9 Saridis G N, and Lee C S G. Approximation theory of Optimal Control for trainable manipulafors. IEEE Trans. on SMC, 1979; 8: 1～8
10 Saridis G N. Entvopy Measures for Optimal and Adaptive Control. IFAC. 1986

附　录

连续时间的Kalman-Bucy滤波器的另一种推导方法。

设线性连续系统如方程（1～2）所示，而随机特性现皆为Gauss量，为简单起见，设有控制作用，即$B=0$。线性滤波器的结构为

$$\dot{\hat{x}}=A\hat{x}+Ky(t)$$

其中A、K待定。令$\tilde{x}=x-\hat{x}$为误差，则由系统方程

$$\dot{\tilde{x}}=(F-KH)\tilde{x}+(F-A-KH)\hat{x}+GW-KV$$

由此

$$\overline{E\{\dot{\tilde{x}}\}}=(F-KH)E\{\tilde{x}\}+(F-A-KH)E\{\hat{x}\}$$

所以，为保证估计是无偏的，必须选取

$$A=F-KH$$

及

$$\hat{x}(t_0)=x_0\ (\Longrightarrow E\{\tilde{x}\tilde{x}^T\}|_{t=t_0}=P_0) \tag{1}$$

于是

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}=F\hat{x}+K(y-H\hat{x}),\quad \hat{x}(t_0)=x_0\\ \dot{\tilde{x}}=(F-KH)\tilde{x}+GW-KV\end{cases} \tag{2}$$

最优滤波的判据为

$$\min_K[E\{a^T\tilde{x})^2\}|\forall a\in R^n]\Longleftrightarrow\min_K\{\tilde{x}\tilde{x}^T\}=\min_K P(t)$$

其中估计的误差方阵为

$$P(t)=E\{\tilde{x}\,\tilde{x}^T\},\quad P(t_0)=P_0$$

令Φ满足

$$\dot{\Phi}(t,\ \tau)=(F-KH)\Phi(t,\ \tau),\quad \Phi(\tau,\ \tau)=I$$

则由(2)式

$$\tilde{x}(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\ \tau)(G\mathrm{d}W-K\mathrm{d}V)+\Phi(t,\ t_0)\tilde{x}(t_0) \tag{3}$$

其中，dW、dV是Wiener过程。由(3)式可得：

$$P(t)=\Phi(t,\ t_0)P_0\Phi^T(t,\ t_0)+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\ \tau)(GQG^T+KQK^T)\Phi^T(t,\ \tau)d\tau$$

由此

$$\begin{aligned}\dot{P}(t)&=\dot{\Phi}(t,\ t_0)P_0\Phi^T(t,\ t_0)+\Phi(t,\ t_0)P_0\dot{\Phi}^T(t,\ t_0)+GQG^T\\&\quad+KRK^T+\int_{t_0}^{t}\{\dot{\Phi}(t,\ \tau)\cdot(GQG^T+KRK^T)\Phi^T(t,\ \tau)\\&\quad+\Phi(t,\ \tau)(GQG^T+KRK^T)\dot{\Phi}^T(t,\ \tau)\}\mathrm{d}\tau\\&=(F-KH)P+P(F-KH)^T+KRK^T+GQG^T\\&=FP+PF^T+GQG^T-PH^TR^{-1}HP+(K-PH^TR^{-1})R(K-PH^TR^{-1})^T\end{aligned}$$

由于$P(0)$给定，所以

$$\min_K P\Longleftrightarrow\min_K \dot{P}$$

于是由上面最后的等式得到：

$$K(t)=P(t)H^TR^{-1} \tag{4}$$

综之，即得

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}=F\hat{x}+PH^TR^{-1}(y-H\hat{x}),\quad \hat{x}(t_0)=x_0\\ \dot{P}=FP+PF^T+GQG^T-PH^TR^{-1}HP,\quad P(0)=P_0\end{cases} \tag{5}$$

此即Kalman－Bucy滤波器。

Formulation of Kalman Filter and Rauch Smoother by Quadratic Optimal Control Method

Wang Feiyao

(Department of Mechanics)

ABSTRACT

The optimal estimation problem of the stochastic systems has been recast by means of the least square method as a deterministic optimal control problem with a quadratic performance index, and Kalman-Bucy Filter as well as Rauch-Tung-Striebel Smoother are formulated by use of a uniform approach. A new formula for optimal smoother is obtained in the derivation.

Key words: Quadratic optimal control, Kalman filter, Rauch smoother.