

机械臂变长度误差跟踪迭代学习控制

陈强¹ 陈凯杰¹ 施卉辉¹ 孙明轩¹

摘要 针对任意初始状态下机械臂轨迹跟踪问题, 提出一种变长度误差跟踪迭代学习控制 (Iterative learning control, ILC) 方法. 首先, 构造不依赖于期望轨迹的双曲余弦型期望误差轨迹, 放宽经典迭代学习控制初始状态要求严格一致的条件. 由于该误差轨迹只需设置一个常数项, 因而能够有效减少计算量, 使得期望误差轨迹的设计更为简单. 其次, 考虑机械臂运行区间随迭代次数变化的问题, 构建虚拟误差变量补偿机制, 通过定义虚拟误差变量对未运行区间进行信息补偿, 放宽经典迭代学习控制的迭代长度不变条件. 在此基础上, 基于 Lyapunov-like 理论设计迭代学习控制器和全限幅学习律, 实现机械臂关节位置在指定区间上跟踪给定的期望轨迹和保证未知参数估计值的有界性. 最后, 仿真结果验证了所提方法的有效性.

关键词 迭代学习控制, 误差跟踪, 变迭代长度, 机械臂

引用格式 陈强, 陈凯杰, 施卉辉, 孙明轩. 机械臂变长度误差跟踪迭代学习控制. 自动化学报, 2023, 49(12): 2594–2604

DOI 10.16383/j.aas.c200701

Error-Tracking Iterative Learning Control for Robot Manipulators With Iteration Varying Lengths

CHEN Qiang¹ CHEN Kai-Jie¹ SHI Hui-Hui¹ SUN Ming-Xuan¹

Abstract In this paper, an error-tracking iterative learning control (ILC) scheme with iteration varying length is proposed for the trajectory tracking of robot manipulators with arbitrary initial shifts. Firstly, a hyperbolic cosine-shaped desired error trajectory independent of the desired trajectory is constructed to relax the identical initial condition requirement in traditional iterative learning control. In the presented desired error trajectory, only one constant parameter needs to be set in prior, such that the computation can be reduced, and the design of the desired error trajectory becomes simpler. Then, the problem that the operating range of the robot manipulator varies with the number of iterations is investigated, and an error compensation mechanism is established to compensate for the error information of the non-operation intervals by defining virtual error variables. Consequently, the identical iterative length condition in traditional iterative learning control can be relaxed. Based on the Lyapunov-like theory, an iterative learning controller and a fully saturated learning law are designed to guarantee that the joint position of the robot manipulator could track the given desired trajectory in the specified interval and the boundedness of the estimation of the unknown parameters, respectively. Numerical simulation results are provided to demonstrate the effectiveness of the proposed scheme.

Key words Iterative learning control (ILC), error-tracking, iteration varying lengths, robot manipulator

Citation Chen Qiang, Chen Kai-Jie, Shi Hui-Hui, Sun Ming-Xuan. Error-tracking iterative learning control for robot manipulators with iteration varying lengths. *Acta Automatica Sinica*, 2023, 49(12): 2594–2604

迭代学习控制 (Iterative learning control, ILC) 能够通过利用上一次的迭代经验进行学习, 不断优化控制器和提高控制性能, 最终实现有限区间内对

期望轨迹的完全跟踪, 已广泛应用于机械臂等执行重复任务的被控对象^[1–5]. 经典迭代学习控制方法主要基于压缩映射方法进行稳定性分析, 包括 D 型、P 型和 PD 型学习算法^[6–9]. 近来, 基于 Lyapunov 理论的自适应迭代学习控制 (Adaptive iterative learning control, AILC) 方法^[10–14] 相继提出, 能够通过不确定系统参数的自适应迭代学习, 间接优化控制器和提高控制性能.

经典 ILC 方法一般要求系统初值严格重置于期望轨迹初始点, 即每次迭代过程中, 系统初值需与期望轨迹的初值保持一致^[15–17]. 然而, 在机械臂等实际系统中, 由于受环境因素和定位精度等影响,

收稿日期 2020-08-29 录用日期 2021-04-29

Manuscript received August 29, 2020; accepted April 29, 2021

国家自然科学基金 (62222315, 61973274, 62073291), 教育部重点实验室开放项目基金 (GDSC202010) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62222315, 61973274, 62073291) and Ministry of Education Key Laboratory Open Project Fund (GDSC202010)

本文责任编辑 刘艳军

Recommended by Associate Editor LIU Yan-Jun

1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023

1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023

该初值一致条件一般难以满足. 因此, 如何放宽初值一致条件是 ILC 研究的热点问题之一, 现有的方法主要包括时变边界层法^[18], 状态修正方法^[19-20]等. 文献 [19] 对迭代学习控制系统在 5 种初值情况下的收敛性能分别进行了分析, 并利用初值信息和期望轨迹构建新的期望轨迹. 文献 [20] 采用三角函数提出一种新型期望轨迹函数放宽解决初值一致条件, 通过设计过渡轨迹衔接每次迭代的初始点与期望轨迹. 然而, 由于过渡轨迹接入点处的位置及其导数与期望轨迹相关, 因此, 状态修正方法在每次迭代时往往需要设计不同的过渡轨迹. 在此基础上, 文献 [21] 提出一种误差跟踪方法, 通过设计期望误差轨迹和迭代学习控制器, 保证误差轨迹沿预设的期望误差轨迹收敛. 与状态修正方法比较, 误差跟踪方法的期望误差轨迹设置不依赖期望状态轨迹, 且期望误差轨迹接入点的位置及其导数可以简单设置为零^[22-23].

此外, 由于机械臂等实际系统中往往存在系统约束、安全限制和信息丢失等问题, 导致迭代学习控制器的设计过程中每次迭代长度发生变化, 称为 ILC 不等长问题. 例如, 康复训练机械臂由于患者体力不足或者力量不足, 可能使迭代长度未到达指定迭代长度就提前终止. 目前, 已有国内外学者对 ILC 不等长问题进行了研究. 文献 [24-25] 针对离散时间线性系统的 ILC 不等长问题, 构造迭代平均算子, 通过利用往次迭代信息更新控制信号, 证明了跟踪误差期望值能够收敛到零, 但控制器设计中要求已知迭代长度概率分布, 且未对跟踪误差方差进行讨论. 文献 [26] 考虑迭代长度概率分布未知的情况, 给出变迭代长度下 P 型学习律的设计方法, 并证明跟踪误差在均方意义上的收敛性. 然而, 该工作并未考虑外部干扰的影响. 文献 [27] 考虑带有干扰和测量噪声的一类离散时间线性系统, 提出基于改进型迭代平均算子的迭代学习控制方法, 并在 2 自由度机械臂实验平台上验证该方法的有效性. 文献 [24-27] 考虑的系统均为离散时间线性系统, 控制器设计一般基于压缩映射方法, 当前迭代的信息并未充分利用.

针对一类非线性连续系统的 ILC 不等长问题, 文献 [28] 设计虚拟误差变量补偿未运行部分信息, 并通过重新定义复合能量函数, 证明当迭代次数趋向无穷时, 系统输出能够实现对期望轨迹的完全跟踪. 文献 [29] 通过引入指标函数, 使得当前迭代中只对最相邻的同一时刻信息进行学习, 并构建改进型复合能量函数证明变迭代长度情况下系统状态的收敛性. 文献 [24-25] 能够有效解决非线性连续系统的 ILC 不等长问题, 但控制器设计仍需满足初值

一致条件. 由于许多实际系统中 ILC 初值问题和不等长问题同时存在, 因此文献 [24-29] 的工作无法直接应用于解决任意初态下的轨迹跟踪问题. 近来, 文献 [30] 针对机械臂轨迹跟踪中的 ILC 初值问题和不等长问题, 提出状态修正方法放宽初值一致条件, 并证明变迭代长度下系统误差的 L_2 范数收敛性. 然而, 状态修正方法在每次迭代时往往需要重新设计过渡轨迹, 导致计算量较大.

基于以上讨论, 本文研究任意初态下的机械臂轨迹跟踪问题, 提出一种变长度误差跟踪迭代学习控制方法. 针对 ILC 初值问题, 构造与期望轨迹无关的双曲余弦期望误差轨迹, 使得迭代初始值可任意设置, 放宽经典迭代学习控制的初值一致条件. 与现有的状态修正方法相比, 修正期望误差轨迹仅需已知实际误差初值及其导数两个条件, 且期望误差轨迹表达式在每次迭代时无需重新设计. 不同于现有的误差跟踪方法^[21-23], 本文设计的期望误差轨迹只需设置一个常数项, 使得误差轨迹设计更加简便. 针对 ILC 不等长问题, 构造虚拟误差变量构建误差补偿机制, 用于补偿未运行区间的误差信息, 放宽迭代长度不变的限制条件. 与文献 [28-30] 相比, 本文提出一种全限幅迭代学习控制方法, 能够有效避免参数估计值因逐点收敛导致上下界不固定的问题, 确保机械臂关节位置误差在整个迭代区间上跟踪期望误差轨迹.

1 问题提出和预备知识

考虑 n 阶自由度的刚性机械臂, 其动态方程为^[30]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_{1,k} = \mathbf{q}_{2,k} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q}_{1,k})\dot{\mathbf{q}}_{2,k} + \mathbf{C}(\mathbf{q}_{1,k}, \mathbf{q}_{2,k})\mathbf{q}_{2,k} + \\ \mathbf{G}(\mathbf{q}_{1,k}) = \boldsymbol{\tau}_k + \mathbf{d}_k \end{cases} \quad (1)$$

其中, $k = 1, 2, 3, \dots$, 表示迭代次数, $\mathbf{q}_{1,k} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{q}_{2,k} \in \mathbf{R}^n$, $\dot{\mathbf{q}}_{2,k} \in \mathbf{R}^n$ 分别表示关节位置、关节速度和关节加速度, $\mathbf{M}(\mathbf{q}_{1,k}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为对称正定的惯性矩阵, $\mathbf{C}(\mathbf{q}_{1,k}, \mathbf{q}_{2,k}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 为向心-科里奥利矩阵, $\mathbf{G}(\mathbf{q}_{1,k}) \in \mathbf{R}^n$ 为重力矩阵, $\mathbf{d}_k \in \mathbf{R}^n$ 表示包括系统模型不确定性和外部扰动在内的有界干扰, 满足 $\|\mathbf{d}_k\| \leq \bar{d}$, \bar{d} 为一未知正常数, $\boldsymbol{\tau}_k \in \mathbf{R}^n$ 表示系统控制输入.

机械臂系统 (1) 具有如下性质:

性质 1^[2]. 矩阵 $\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_{1,k}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}_{1,k}, \mathbf{q}_{2,k})$ 是斜对称矩阵, 即对任意向量 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x}^T[\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}_{1,k}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}_{1,k}, \mathbf{q}_{2,k})]\mathbf{x} = 0$ 成立.

性质 2^[2]. 对于任意向量 $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$ 和任意的已知向量 $\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} \in \mathbf{R}^n$, 存在一个未知的时变参数向量 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{R}^m$, 使得

$$M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{v} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})\boldsymbol{\theta} \quad (2)$$

其中, $\mathbf{W}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 是一个回归矩阵.

在控制器设计和稳定性分析之前, 给出引理 1.

引理 1^[13]. 给定标量 a 和 b , 满足 $\underline{b} < a < \bar{b}$, 则有以下不等式成立

$$[\text{sat}(b) - a][\text{sat}(b) - b] \leq 0 \quad (3)$$

其中, \bar{b} 为 b 的上界, \underline{b} 为 b 的下界, $\text{sat}(\cdot)$ 为饱和函数, 其表达式为

$$\text{sat}(b) = \begin{cases} \bar{b}, & \bar{b} < b \\ b, & \underline{b} \leq b \leq \bar{b} \\ \underline{b}, & b < \underline{b} \end{cases} \quad (4)$$

本文控制目标为针对任意初态下机械臂系统 (1), 设计迭代学习控制器 τ_k , 使得当迭代次数 k 趋向于无穷时, 关节位置 $\mathbf{q}_{1,k}(t)$ 能够在指定区间 $[\Delta, T_k]$ 跟踪期望轨迹 $q_d(t)$, 即当 $k \rightarrow \infty$ 时, 有 $\tilde{\mathbf{q}}_{1,k} \rightarrow 0, t \in [\Delta, T_k]$ 成立.

2 期望误差函数设计

经典的迭代学习控制器设计一般要求系统满足初值一致条件^[15-17]

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{1,k}(0) = \mathbf{q}_d(0) \\ \mathbf{q}_{2,k}(0) = \dot{\mathbf{q}}_d(0) \end{cases} \quad (5)$$

对 $\forall k$ 成立. 然而在实际运行中, 由于机械臂定位误差以及外部干扰等问题存在, 条件 (5) 一般难以满足. 因此, 本文构造一种不依赖于期望轨迹的期望误差轨迹 $\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(t)$, 以放宽初值一致条件 (5).

如图 1 所示, 期望误差轨迹是由误差过渡轨迹和恒为零的轨迹衔接而成, 且期望误差轨迹的设计需要满足以下条件^[21]

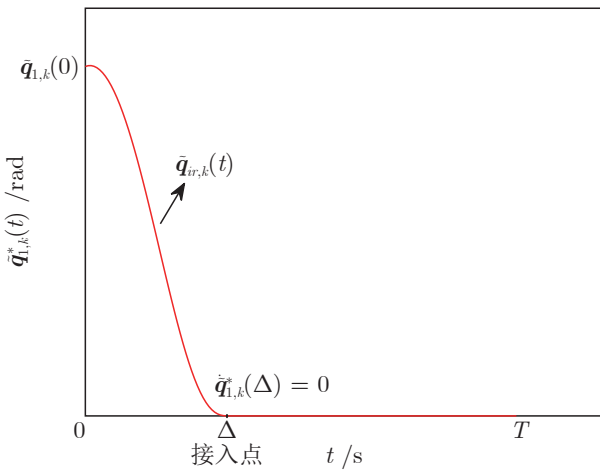


图 1 期望误差轨迹

Fig.1 Desired error trajectory

$$\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(0) = \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}(0), \quad \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(\Delta) = 0 \quad (6)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}^*(0) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}(0), \quad \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}^*(\Delta) = 0 \quad (7)$$

其中, $\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}(t) = \mathbf{q}_{1,k}(t) - \mathbf{q}_d(t) \in \mathbf{R}^n$ 和 $\tilde{\mathbf{q}}_{2,k}(t) = \mathbf{q}_{2,k}(t) - \dot{\mathbf{q}}_d(t) \in \mathbf{R}^n$ 分别是 $\mathbf{q}_{1,k}(t), \mathbf{q}_{2,k}(t)$ 的状态跟踪误差, $\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(0)$ 和 $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}^*(0)$ 分别是期望误差轨迹及其导数的初值, $\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(\Delta)$ 和 $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}^*(\Delta)$ 分别是期望误差轨迹及其导数接入点的值.

上述对期望误差轨迹的设计不要求系统状态满足初值严格一致条件 (5), 而只要求被设计的过渡轨迹满足条件 (6) 和 (7). 其中, 式 (6) 是为了保证期望误差轨迹能够衔接误差初值和接入点, $\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(0) = \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}(0)$ 表示期望误差轨迹初值与实际误差初值相等. 式 (7) 则是为了保证期望误差轨迹在初始点和接入点处光滑可导, $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}^*(0) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}(0)$ 可以保证期望误差轨迹在初始点光滑可导, $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}^*(\Delta) = 0$ 则保证期望误差轨迹在接入点 $t = \Delta$ 时刻光滑可导.

根据式 (6) 和式 (7), 本文构造一种新的双曲余弦型期望误差轨迹, 表达式为

$$\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(t) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}_{ir,k}(t), & t \in [0, \Delta] \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

其中, Δ 表示接入点时刻, $\tilde{\mathbf{q}}_{ir,k}(t)$ 表示误差过渡轨迹, 具体表达形式为

$$\tilde{\mathbf{q}}_{ir,k}(t) = [\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}(0) + \tilde{\mathbf{q}}_{2,k}(0)\sin(t)](2 - \cosh(at))^3 \quad (9)$$

为了使设计的期望误差轨迹满足条件 (6), 常数 a 的取值可根据 $\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(\Delta) = 0$ 确定, 即满足 $\cosh(a\Delta) = 2$. 通过计算可得 $a = \frac{1}{\Delta} \ln(2 \pm \sqrt{3})$, 因此, a 的取值只与预先设定的接入点时间 Δ 有关. 由式 (9) 可以看出, 本文在期望误差初始值和零误差点之间构造光滑连续的误差过渡轨迹 $\tilde{\mathbf{q}}_{ir,k}(t)$, 相当于为机械臂轨迹跟踪控制安排一个理想的误差收敛过渡过程, 然后设计控制器, 使得机械臂系统的实际位置误差跟踪这个“安排的误差收敛过渡过程”, 最终实现机械臂位置轨迹快速且精确跟踪期望轨迹的控制目标.

由式 (8) 和图 1 可以发现, 期望误差轨迹在整个期望区间 $[0, T]$ 连续可导, 当状态误差实现对期望误差轨迹的完全跟踪时, 关节位置 $\mathbf{q}_{1,k}$ 能在指定区间 $[\Delta, T]$ 完全跟踪上给定的期望轨迹 q_d .

状态修正方法^[19-20, 30] 也是解决初值问题的方法之一. 为了解决任意初值的跟踪问题, 状态修正方法对期望轨迹进行修正, 设计过渡轨迹连接每次迭代初始位置和期望轨迹, 如图 2 所示. 修正后的期望误差轨迹为^[19]

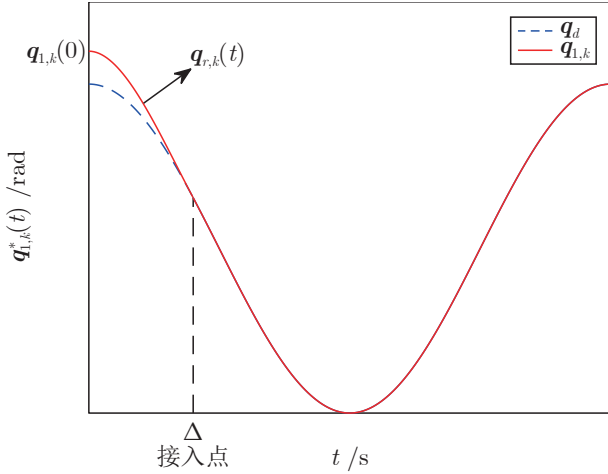


图 2 状态修正轨迹

Fig.2 State rectifying trajectory

$$\mathbf{q}_{1,k}^*(t) = \begin{cases} \mathbf{q}_{r,k}(t), & t \in [0, \Delta] \\ \mathbf{q}_d, & \text{其他} \end{cases} \quad (10)$$

其中, $\mathbf{q}_{r,k}(t) = \mathbf{A}_0 t^3 + \mathbf{A}_1 t^2 + \mathbf{A}_2 t + \mathbf{A}_3$ 是状态过渡轨迹:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\Delta \dot{\mathbf{q}}_d(\Delta) - 2\mathbf{q}_d(\Delta) + \Delta \dot{\mathbf{q}}_{1,k}(0) + 2\mathbf{q}_{1,k}(0)}{\Delta^3}$$

$$\mathbf{A}_1 = -\frac{\Delta \dot{\mathbf{q}}_d(\Delta) - 3\mathbf{q}_d(\Delta) + 2\Delta \dot{\mathbf{q}}_{1,k}(0) + 3\mathbf{q}_{1,k}(0)}{\Delta^2}$$

$$\mathbf{A}_2 = \dot{\mathbf{q}}_{1,k}(0), \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{q}_{1,k}(0)$$

轨迹 (10) 保证了过渡轨迹能平滑地接入期望状态轨迹. 然而, 参数 \mathbf{A}_0 和 \mathbf{A}_1 依赖于接入点的期望状态轨迹信息 $\mathbf{q}_d(\Delta)$ 和 $\dot{\mathbf{q}}_d(\Delta)$. 由于系统初值 $\mathbf{q}_{1,k}(0)$ 和 $\dot{\mathbf{q}}_{1,k}(0)$ 随迭代次数变化, 当期望状态轨迹发生变化时, 参数 $\mathbf{A}_0 \sim \mathbf{A}_3$ 需要重新计算, 导致计算量较大.

与状态修正方法 (10) 直接修正期望轨迹 $\mathbf{q}_{1,k}^*(t)$ 不同, 本文通过构造一种新的双曲余弦型过渡轨迹 $\tilde{\mathbf{q}}_{ir,k}(t)$ 修正期望误差轨迹 $\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(t)$, 仅需要实际误差初值 $\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}(0)$ 及其导数 $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}(0)$ 两个已知条件, 且设置接入点 $t = \Delta$ 时刻的函数值及其导数为 0. 由于期望误差轨迹的设置与期望轨迹无关, 因此对于不同的期望轨迹, 本文提出的期望误差轨迹表达式在每次迭代时无需重新设计. 综上, 本文提出的双曲余弦期望误差轨迹 (8) 能够避免对 $\mathbf{q}_d(\Delta)$ 和 $\dot{\mathbf{q}}_d(\Delta)$ 的依赖, 且只需设计一个与期望轨迹无关的常数项 a , 因而设计思路更为简单且计算量相对较小.

注 1. 文献 [23] 采用的是多项式形式的误差过渡轨迹, 表达式为

$$e'_{ir,k}(t) = e_{1,k}(0)(\mathbf{A}'_0 t^3 + \mathbf{A}'_1 t^2 + \mathbf{A}'_2 t + \mathbf{A}'_3) \quad (11)$$

其中, $\mathbf{A}'_0 = (\Delta \dot{e}_{1,k}(0) + 2e_{1,k}(0))/\Delta^3$, $\mathbf{A}'_1 = (-2\Delta \dot{e}_{2,k}(0) - 3e_{1,k}(0))/\Delta^2$, $\mathbf{A}'_2 = \dot{e}_{1,k}(0)$, $\mathbf{A}'_3 = e_{1,k}(0)$, $e_{1,k}(0)$ 和 $\dot{e}_{1,k}(0)$ 分别为状态误差初值及其导数初值.

对比式 (9) 和式 (11) 的误差过渡轨迹可以看出, 两种形式的参数设计虽然都与期望轨迹无关, 但是本文设计的双曲余弦形式过渡轨迹函数只含一个常数项 a , 设计更加简单.

为了方便描述, 在不引起歧义的情况下, 令 $\mathbf{M}_k = \mathbf{M}(\mathbf{q}_{1,k})$, $\mathbf{C}_k = \mathbf{C}(\mathbf{q}_{1,k}, \mathbf{q}_{2,k})$, $\mathbf{G}_k = \mathbf{G}(\mathbf{q}_{1,k})$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}(t)$, $\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^* = \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(t)$, $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}^* = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}^*(t)$, $\|\cdot\|$ 表示 L_2 范数.

3 变长度误差跟踪迭代学习控制器设计

3.1 变迭代长度

本文考虑机械臂的变长度问题, 即实际运行时间 T_k 随迭代次数变化的问题. 此时, 系统可能会遇到 $T_k > T$ 和 $T_k \leq T$ 两种情况. 针对 $T_k > T$ 的情况, 可以发现在期望迭代长度 $[0, T]$ 内的数据已经满足下次迭代所需数据的要求, 而 $(T, T_k]$ 之间的数据由于超过期望迭代长度, 无需参与下次迭代更新, 因而可以直接舍弃. 本文集中讨论 $T_k \leq T$ 的情况, 即实际迭代长度在期望迭代长度之内. 当 $t \in (T_k, T]$ 时, 系统已经完成本次迭代, 控制器不再参与系统运行, 但参数更新律仍需将上次的迭代信息记录到未运行区间, 使得每次迭代都能是最相邻有效的更新信息. 定义 T_{\min} 和 T_{\max} 为 T_k 中最小和最大的迭代长度, 则本文针对 $\Delta < T_{\min} \leq T_k \leq T_{\max} = T$ 情况设计控制器.

假设 1^[28]. T_k 是一个随机变量, 它的概率分布函数为

$$F_{T_k}(t) = P[T_k < t] = \begin{cases} 0, & t \in [0, T_{\min}] \\ p(t), & t \in (T_{\min}, T_{\max}] \\ 1, & t \in (T_{\max}, \infty) \end{cases} \quad (12)$$

其中, $P[\cdot]$ 表示概率, $0 \leq p(t) \leq 1$ 为一个连续函数.

注 2. 假设 1 描述了 T_k 的分布情况, 从式 (12) 可得, $F_{T_k}(T_{\min}) = 0$ 和 $F_{T_k}(T_{\max}) < 1$. 其中, 前者意味着当 $t \in [0, T_{\min}]$ 时, 由于 $T_k \geq T_{\min}$, 因而系统会继续运行; 后者则意味着迭代长度 T_k 有一定概率满足 $T_k = T_{\max}$, 即系统有一定概率运行至最大迭代长度, 进而保证在迭代次数趋于无穷时, $T_k = T_{\max}$ 的情况可以出现无穷次. 此外, 由于控制器和参数学习律的设计与 T_k 的概率分布函数无关, 因此, 假设

1 中 T_k 的概率分布函数无需提前已知, 假设 1 可适用于大部分实际系统.

由于运行到 $t = T_k$ 时刻, 系统会回到初始状态进行下一次迭代, 因此, 在本次迭代中系统不包含 $(T_k, T]$ 时刻的跟踪信息. 与已有文献使用零补偿信息的方式不同^[24-25], 本文利用 T_k 时刻的误差值补偿未运行部分的误差信息, 设计如下虚拟误差变量

$$\mathbf{z}_{1,k} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(t), & t \in [0, T_k] \\ \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}(T_k) - \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(T_k), & t \in (T_k, T] \end{cases} \quad (13)$$

$$\mathbf{z}_{2,k} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}_{2,k}(t) - \boldsymbol{\alpha}_k(t), & t \in [0, T_k] \\ \tilde{\mathbf{q}}_{2,k}(T_k) - \boldsymbol{\alpha}_k(T_k), & t \in (T_k, T] \end{cases} \quad (14)$$

其中, $\boldsymbol{\alpha}_k = \boldsymbol{\alpha}_k(t)$ 为虚拟控制器, 具体设计将在第 3.2 节中详细描述.

注 3. 当 $t \in (T_k, T]$ 时, $\mathbf{z}_{1,k}$ 和 $\mathbf{z}_{2,k}$ 的跟踪信息是通过误差补偿机制人为补充的, 而非系统实际运行过程中产生的误差信号. 该部分补充的信息只用于稳定性分析, 并不用于系统控制器和参数学习律设计.

3.2 控制器设计

为了保证变迭代长度情况下的稳定性, 以下控制器和学习律的设计基于 $t \in [0, T_k]$ 和 $t \in (T_k, T]$ 两种情况进行讨论.

1) 情形 1: $t \in [0, T_k]$

步骤 1. 构造 Lyapunov 函数

$$V_{1,k} = \frac{1}{2} \mathbf{z}_{1,k}^T \mathbf{z}_{1,k} \quad (15)$$

对式 (15) 进行求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1,k} &= \mathbf{z}_{1,k}^T \dot{\mathbf{z}}_{1,k} = \\ & \mathbf{z}_{1,k}^T (\dot{\mathbf{q}}_{1,k} - \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}^*) = \\ & \mathbf{z}_{1,k}^T (\mathbf{z}_{2,k} + \boldsymbol{\alpha}_k - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}^*) \end{aligned} \quad (16)$$

设计虚拟控制器为

$$\boldsymbol{\alpha}_k = -c_1 \mathbf{z}_{1,k} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_{1,k}^* \quad (17)$$

其中, $c_1 > 0$ 是正常数.

将虚拟控制器 (17) 代入式 (16), 则有

$$\dot{V}_{1,k} = \mathbf{z}_{1,k}^T \mathbf{z}_{2,k} - c_1 \mathbf{z}_{1,k}^T \mathbf{z}_{1,k} \quad (18)$$

步骤 2. 构造 Lyapunov 函数

$$V_{2,k} = \frac{1}{2} \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{M}_k \mathbf{z}_{2,k} \quad (19)$$

对式 (19) 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2,k} &= \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{M}_k \dot{\mathbf{z}}_{2,k} + \frac{1}{2} \mathbf{z}_{2,k}^T \dot{\mathbf{M}}_k \mathbf{z}_{2,k} = \\ & \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{M}_k (\dot{\mathbf{q}}_{2,k} - \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k) + \frac{1}{2} \mathbf{z}_{2,k}^T \dot{\mathbf{M}}_k \mathbf{z}_{2,k} = \\ & \mathbf{z}_{2,k}^T (\boldsymbol{\tau}_k + \mathbf{d}_k - \mathbf{C}_k \mathbf{q}_{2,k} - \mathbf{G}_k) - \\ & \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{M}_k (\ddot{\mathbf{q}}_d + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k) + \frac{1}{2} \mathbf{z}_{2,k}^T \dot{\mathbf{M}}_k \mathbf{z}_{2,k} = \\ & \mathbf{z}_{2,k}^T [\boldsymbol{\tau}_k + \mathbf{d}_k - \mathbf{C}_k (\dot{\mathbf{q}}_d + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k) - \mathbf{G}_k] + \\ & \frac{1}{2} \mathbf{z}_{2,k}^T (\dot{\mathbf{M}}_k - 2\mathbf{C}_k) \mathbf{z}_{2,k} - \\ & \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{M}_k (\ddot{\mathbf{q}}_d + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_k) \end{aligned} \quad (20)$$

根据性质 1 和性质 2, 式 (20) 可以简化为

$$\dot{V}_{2,k} = \mathbf{z}_{2,k}^T (\boldsymbol{\tau}_k + \mathbf{d}_k - \mathbf{W}_k \boldsymbol{\theta}) \quad (21)$$

其中, $\mathbf{W}_k \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 为第 k 次迭代时的回归矩阵, n 表示机械臂的自由度, m 表示时变参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 的维数.

因此, 设计实际控制器 $\boldsymbol{\tau}_k$ 为

$$\boldsymbol{\tau}_k = -\mathbf{z}_{1,k} - c_2 \mathbf{z}_{2,k} + \mathbf{W}_k \hat{\boldsymbol{\theta}}_k - \hat{d}_k \text{sgn}(\mathbf{z}_{2,k}) \quad (22)$$

其中, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$ 为参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的估计值, $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数, $\text{sgn}(\mathbf{z}_{2,k}) \in \mathbf{R}^n$, $c_2 > 0$ 为正常数, \hat{d}_k 为 \bar{d} 的估计值.

当 $t \in [0, T_k]$ 时, 设计参数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$ 和 \hat{d}_k 的全限幅学习律为

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = \text{sat}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k^*(t)) \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_k^*(t) = \text{sat}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}^*(t)) - \eta \mathbf{W}_k^T \mathbf{z}_{2,k} \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \hat{d}_k(t) = \text{sat}(\hat{d}_k^*(t)) \\ \hat{d}_k^*(t) = \text{sat}(\hat{d}_{k-1}^*(t)) + \gamma \|\mathbf{z}_{2,k}\| \end{cases} \quad (24)$$

其中, η 和 γ 为正常数, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1}^*(t) = 0$, $\hat{d}_{-1}^*(t) = 0$.

将控制器 (22) 代入式 (21), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2,k} &= -\mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{z}_{1,k} - c_2 \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{z}_{2,k} + \\ & \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{W}_k \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k + \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{d}_k - \hat{d}_k \|\mathbf{z}_{2,k}\| \leq \\ & -\mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{z}_{1,k} - c_2 \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{z}_{2,k} + \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{W}_k \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k + \\ & \bar{d} \|\mathbf{z}_{2,k}\| - \hat{d}_k \|\mathbf{z}_{2,k}\| \leq \\ & -\mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{z}_{1,k} - c_2 \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{z}_{2,k} + \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{W}_k \tilde{\boldsymbol{\theta}}_k - \\ & \tilde{d}_k \|\mathbf{z}_{2,k}\| \end{aligned} \quad (25)$$

其中, $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_k - \boldsymbol{\theta}$, $\tilde{d}_k = \hat{d}_k - \bar{d}$.

2) 情形 2: $t \in (T_k, T]$

当 $t \in (T_k, T]$ 时, 实际系统已经完成本次迭代运行, 所以无需加入控制器. 但是, 参数学习律仍然

需要保留上一次的迭代信息, 此时全限幅学习律设计为

$$\begin{cases} \hat{\theta}_k(t) = \text{sat}(\hat{\theta}_k^*(t)) \\ \hat{\theta}_{k-1}^*(t) = \text{sat}(\hat{\theta}_{k-1}^*(t)) \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \hat{d}_k(t) = \text{sat}(\hat{d}_k^*(t)) \\ \hat{d}_{k-1}^*(t) = \text{sat}(\hat{d}_{k-1}^*(t)) \end{cases} \quad (27)$$

由以上分析可知, 在 $t \in (T_k, T]$ 时无需设计控制器, 且学习律 (26) 和 (27) 中并未包含 $\mathbf{z}_{1,k}$, $\mathbf{z}_{2,k}$ 的相关信息. 因此, 虚拟误差变量 $\mathbf{z}_{1,k}$, $\mathbf{z}_{2,k}$ 在 $t \in (T_k, T]$ 时并不影响控制器和参数学习律的设计.

注 4. 与已有迭代平均算子^[24]方法相比, 本文设计的学习律 (26) 和 (27) 能不断保存上一迭代时刻的参数信息, 为之后的参数学习保存最近一次相同时刻的迭代信息, 使得每次学习律都是根据最相邻一次的迭代信息进行, 因此能够充分利用以往迭代中的信息.

注 5. 本文采用全限幅学习律 (23), (24), (26) 和 (27), 避免参数估计值因逐点收敛导致上下界不固定的情况, 使得参数估计值 $\hat{\theta}_k(t)$, $\hat{d}_k(t)$ 受到固定大小的饱和限幅. 部分限幅学习律^[10]也能保证参数估计值的有界性, 但是由于部分限幅学习律中存在未限幅项, 导致参数估计值的界并不是固定的值.

4 稳定性分析

定理 1. 针对任意初态的 n 自由度机械臂 (1), 在假设 1 的前提下, 设计实际控制器 (22) 和参数学习律 (23), (24), (26) 和 (27), 使得当迭代次数趋向无穷时, 实现关节位置误差 $\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}$ 在 $[\Delta, T_k]$ 区间上以概率 1 收敛.

证明. 设计复合能量函数如下:

$$E_k = V_{1,k} + V_{2,k} + \frac{1}{2\eta} \int_0^t \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k d\tau + \frac{1}{2\gamma} \int_0^t \tilde{d}_k^2 d\tau \quad (28)$$

1) 证明 E_k 随迭代次数单调递减.

当 $t \in [0, T_k]$ 时, 定义 $\delta E_k = E_k - E_{k-1}$, 则有

$$\begin{aligned} \delta E_k &= V_{1,k} + V_{2,k} - V_{1,k-1} - V_{2,k-1} + \\ &\quad \frac{1}{2\eta} \int_0^t (\tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}^T \tilde{\theta}_{k-1}) d\tau + \\ &\quad \frac{1}{2\gamma} \int_0^t (\tilde{d}_k^2 - \tilde{d}_{k-1}^2) d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

式 (29) 中, $V_{1,k} + V_{2,k} - V_{1,k-1} - V_{2,k-1}$ 可以进一步写为

$$V_{1,k} + V_{2,k} - V_{1,k-1} - V_{2,k-1} \leq$$

$$\begin{aligned} &V_{1,k}(0) + V_{2,k}(0) + \int_0^t (\dot{V}_{1,k} + \dot{V}_{2,k}) d\tau - V_{1,k-1} \leq \\ &\int_0^t (-c_1 \mathbf{z}_{1,k}^T \mathbf{z}_{1,k} - c_2 \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{z}_{2,k} + \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{W}_k \tilde{\theta}_k - \\ &\tilde{d}_k \|\mathbf{z}_{2,k}\|) d\tau - \frac{1}{2} \mathbf{z}_{1,k-1}^T \mathbf{z}_{1,k-1} \end{aligned} \quad (30)$$

其中, $V_{1,k}(0) = V_{2,k}(0) = \frac{1}{2} \mathbf{z}_{1,k}^T(0) \mathbf{z}_{1,k}(0) = \frac{1}{2} \mathbf{z}_{2,k}^T(0) \times \mathbf{M}_k(0) \mathbf{z}_{2,k}(0) = 0$.

根据 $(b-a)^T(b-a) - (c-a)^T(c-a) = 2(b-c)^T(b-a) - (b-c)^T(b-c)$ 和引理 1, 有

$$\begin{aligned} &\tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}^T \tilde{\theta}_{k-1} = \\ &2(\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1})^T \tilde{\theta}_k - (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1})^T (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1}) \leq \\ &2(\hat{\theta}_k + \hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_{k-1})^T \tilde{\theta}_k = \\ &2(\text{sat}(\hat{\theta}_k^*) - \hat{\theta}_k^*)^T (\text{sat}(\hat{\theta}_k^*) - \theta) + \\ &2(\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_{k-1})^T \tilde{\theta}_k \leq \\ &-2\eta \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{W}_k \tilde{\theta}_k \end{aligned} \quad (31)$$

同理, 可得

$$\tilde{d}_k^2 - \tilde{d}_{k-1}^2 \leq 2\gamma \|\mathbf{z}_{2,k}\| \tilde{d}_k \quad (32)$$

将式 (30) ~ (32) 代入式 (29), 可得

$$\begin{aligned} \delta E_k &\leq - \int_0^t (c_1 \mathbf{z}_{1,k}^T \mathbf{z}_{1,k} + c_2 \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{z}_{2,k}) d\tau - \\ &\frac{1}{2} \mathbf{z}_{1,k-1}^T \mathbf{z}_{1,k-1} \leq 0 \end{aligned} \quad (33)$$

故当 $t \in [0, T_k]$ 时, E_k 随迭代次数单调递减. 当 $t \in (T_k, T]$ 时, 根据积分的分段可加性, 式 (28) 可改写为

$$E_k(t) = \phi_{1,k}(t) + \phi_{2,k}(t) \quad (34)$$

其中,

$$\begin{aligned} \phi_{1,k}(t) &= V_{1,k}(t) + V_{2,k}(t) + \frac{1}{2\eta} \int_0^{T_k} \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k d\tau + \\ &\frac{1}{2\gamma} \int_0^{T_k} \tilde{d}_k^2 d\tau \end{aligned}$$

$$\phi_{2,k}(t) = \frac{1}{2\eta} \int_{T_k}^t \tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k d\tau + \frac{1}{2\gamma} \int_{T_k}^t \tilde{d}_k^2 d\tau$$

定义 $\delta\phi_{1,k} = \phi_{1,k}(t) - \phi_{1,k-1}(t)$, 根据式 (13) ~ (15) 和式 (19), 有

$$V_{1,k}(t) = V_{1,k}(T_k) \quad (35)$$

$$V_{2,k}(t) = V_{2,k}(T_k) \quad (36)$$

与式 (29) ~ (33) 的证明过程类似, 可得

$$\begin{aligned} \delta\phi_{1,k} &= V_{1,k}(T_k) + V_{2,k}(T_k) - V_{1,k-1}(t) - V_{2,k-1}(t) + \\ &\frac{1}{2\eta} \int_0^{T_k} (\tilde{\theta}_k^T \tilde{\theta}_k - \tilde{\theta}_{k-1}^T \tilde{\theta}_{k-1}) d\tau + \\ &\frac{1}{2\gamma} \int_0^{T_k} (\tilde{d}_k^2 - \tilde{d}_{k-1}^2) d\tau \leq \\ &- \int_0^{T_k} (c_1 \mathbf{z}_{1,k}^T \mathbf{z}_{1,k} + c_2 \mathbf{z}_{2,k}^T \mathbf{z}_{2,k}) d\tau - \\ &\frac{1}{2} \mathbf{z}_{1,k-1}^T(t) \mathbf{z}_{1,k-1}(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

由式 (37) 可知, 为证明 E_k 在 $t \in [0, T]$ 上随迭代次数单调递减, 只需证明 $\delta\phi_{2,k} = \phi_{2,k}(t) - \phi_{2,k-1}(t) \leq 0$ 成立. 由全限幅学习律 (26) 和 (27), 可得

$$\begin{aligned} \phi_{2,k}(t) &= \frac{1}{2\eta} \int_{T_k}^t (\text{sat}(\hat{\theta}_{k-1}^*) - \theta)^T (\text{sat}(\hat{\theta}_{k-1}^*) - \theta) d\tau + \\ &\frac{1}{2\gamma} \int_{T_k}^t (\text{sat}(\hat{d}_{k-1}^*) - \bar{d})^2 d\tau = \\ &\frac{1}{2\eta} \int_{T_k}^t (\hat{\theta}_{k-1} - \theta)^T (\hat{\theta}_{k-1} - \theta) d\tau + \\ &\frac{1}{2\gamma} \int_{T_k}^t (\hat{d}_{k-1} - \bar{d})^2 d\tau = \phi_{2,k-1}(t) \end{aligned} \quad (38)$$

由式 (38) 可知, $\delta\phi_{2,k} = 0$ 成立, 进而可得当 $t \in (T_k, T]$ 时, 有 $\delta\phi_{1,k} \leq 0$ 且 $\delta\phi_{2,k} = 0$ 成立, 因此, $\delta E_k(t) \leq 0$ 仍成立. 综上所述, E_k 在 $[0, T]$ 区间上任意时刻的值随迭代次数增加而单调递减.

2) 证明 $k = 0$ 时, $E_0(t)$ 在 $[0, T]$ 是有界的.

$$E_0 = V_{1,0} + V_{2,0} + \frac{1}{2\eta} \int_0^t \tilde{\theta}_0^T \tilde{\theta}_0 d\tau + \frac{1}{2\gamma} \int_0^t \tilde{d}_0^2 d\tau \quad (39)$$

当 $t \in [0, T_k]$ 时, 对式 (39) 求导, 可得

$$\begin{aligned} \dot{E}_0 &= \dot{V}_{1,0} + \dot{V}_{2,0} + \frac{1}{2\eta} \tilde{\theta}_0^T \dot{\tilde{\theta}}_0 - \frac{1}{2\eta} \tilde{\theta}_{-1}^T \dot{\tilde{\theta}}_{-1} + \\ &\frac{1}{2\eta} \tilde{\theta}_{-1}^T \dot{\tilde{\theta}}_{-1} + \frac{1}{2\gamma} \dot{\tilde{d}}_0^2 - \frac{1}{2\gamma} \dot{\tilde{d}}_{-1}^2 + \frac{1}{2\gamma} \dot{\tilde{d}}_{-1}^2 = \\ &- c_1 \mathbf{z}_{1,0}^T \mathbf{z}_{1,0} - c_2 \mathbf{z}_{2,0}^T \mathbf{z}_{2,0} + \\ &\mathbf{z}_{2,0}^T \mathbf{W}_0 \tilde{\theta}_0 - \tilde{d}_0 \|\mathbf{z}_{2,0}\| + \\ &\frac{1}{2\eta} \theta^T \theta + \frac{1}{\eta} (\hat{\theta}_0 - \hat{\theta}_0^*)^T \tilde{\theta}_0 + \frac{1}{\eta} (\hat{\theta}_0^* - \hat{\theta}_{-1})^T \tilde{\theta}_0 + \\ &\frac{1}{2\gamma} \bar{d}^2 + \frac{1}{\gamma} (\hat{d}_0 - \hat{d}_0^*) \tilde{d}_0 + \frac{1}{\gamma} (\hat{d}_0^* - \hat{d}_{-1})^T \tilde{d}_0 \leq L \end{aligned} \quad (40)$$

其中, $L = \frac{1}{2\eta} \theta^T \theta + \frac{1}{2\gamma} \bar{d}^2 > 0$ 是一个常数.

因此, $E_0(t) \leq E_0(0) + T_k L < \infty$ 是一个有界函数, 即 $E_0(t)$ 在 $[0, T_k]$ 是有界的.

当 $t \in (T_k, T]$ 时, 由于 $V_{1,0}(t) = V_{1,0}(T_k)$, $V_{2,0}(t) = V_{2,0}(T_k)$, $\frac{1}{2\eta} \int_0^{T_k} \tilde{\theta}_0^T \tilde{\theta}_0 d\tau + \frac{1}{2\gamma} \int_0^{T_k} \tilde{d}_0^2 d\tau$ 已经证明有界, 现只需证明 $\frac{1}{2\eta} \int_{T_k}^t \tilde{\theta}_0^T \tilde{\theta}_0 d\tau + \frac{1}{2\gamma} \int_{T_k}^t \tilde{d}_0^2 d\tau$ 有界, 即可证明 $E_0(t)$ 在整个迭代长度 $[0, T]$ 有界.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\eta} \int_{T_k}^t \tilde{\theta}_0^T \tilde{\theta}_0 d\tau + \frac{1}{2\gamma} \int_{T_k}^t \tilde{d}_0^2 d\tau = \\ &\frac{1}{2\eta} \int_{T_k}^t (\hat{\theta}_0 - \theta)^T (\hat{\theta}_0 - \theta) d\tau + \frac{1}{2\gamma} \int_{T_k}^t (\hat{d}_0 - \bar{d})^2 d\tau = \\ &\frac{1}{2\eta} \int_{T_k}^t (\hat{\theta}_{-1} - \theta)^T (\hat{\theta}_{-1} - \theta) d\tau + \\ &\frac{1}{2\gamma} \int_{T_k}^t (\hat{d}_{-1} - \bar{d})^2 d\tau \leq \\ &\frac{T - T_k}{2\eta} \theta^T \theta + \frac{T - T_k}{2\gamma} \bar{d}^2 < \infty \end{aligned} \quad (41)$$

综上所述, $E_0(t)$ 在 $[0, T]$ 上是有界的. 根据 1) 和 2) 两部分的证明结果, 可以得到如下结论:

$$\begin{aligned} E_k(t) &= E_0(t) + \sum_{j=1}^k \delta E_j(t) \leq \\ &E_0(t) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2} \mathbf{z}_{1,j}^T \mathbf{z}_{1,j} - \\ &\sum_{j=1}^k \int_0^{\min\{t, T_j\}} (c_1 \mathbf{z}_{1,j}^T \mathbf{z}_{1,j} + c_2 \mathbf{z}_{2,j}^T \mathbf{z}_{2,j}) d\tau \end{aligned} \quad (42)$$

由于 $E_0(t)$ 有界且 $0 \leq E_k(t) \leq E_0(t)$, 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^k \int_0^{\min\{t, T_j\}} (c_1 \mathbf{z}_{1,j}^T \mathbf{z}_{1,j} + c_2 \mathbf{z}_{2,j}^T \mathbf{z}_{2,j}) d\tau + \\ &\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2} \mathbf{z}_{1,j}^T \mathbf{z}_{1,j} \leq E_0(t) - E_k(t) < \infty \end{aligned} \quad (43)$$

为了更直观地说明 $\mathbf{z}_{1,k}$ 采取 L_2 范数形式以概率 1 收敛至 0, 引入满足伯努利分布的随机变量 $\gamma_k(t)$, 取值分别为 0 或 1. 当 $\gamma_k(t) = 1$, 意味着在第 k 次迭代的 t 时刻系统仍在运行, 即 $t \leq T_k$; 当 $\gamma_k(t) = 0$, 意味着在第 k 次迭代的 t 时刻系统已经停止运行, 即 $T_k < t$. 由假设 1 可知, $\gamma_k(t) = 1$ 发生的概率为 $q(t) = P(\gamma_k(t) = 1) = P(t \leq T_k) = 1 - P(T_k < t) = 1 - F_{T_k}(t)$, 且 $q(T) > 0$ 意味着系统有概率运行至最大迭代长度. 由此, 可以将 $\mathbf{z}_{1,k}$ 写成另一种形式, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{1,k}(t) &= \gamma_k(t) [\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(t)] + \\ &(1 - \gamma_k(t)) [\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}(T_k) - \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(T_k)] \end{aligned} \quad (44)$$

迭代次数趋向无穷时, 根据式 (43) 和式 (44), 可得

$$\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j(t) [(\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(t))^T (\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(t))] \leq \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j(t) \mathbf{z}_{1,k}^T \mathbf{z}_{1,k} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{z}_{1,k}^T \mathbf{z}_{1,k} < \infty \quad (45)$$

随着迭代次数趋向无穷, 即 $k \rightarrow \infty$, 当 $t \in [0, T_{\min})$ 时, $\gamma_j(t) = 1$ 恒成立, 因此可以推出 $[\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(t)]$ 收敛至 0 成立. 当 $t \in [T_{\min}, T]$ 时, 由假设 1 知, $\gamma_j(t) = 1$ 仍会有无穷次成立, $[\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}(t) - \tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*(t)]$ 仍然以概率 1 收敛至 0 成立. 综上所述, 当迭代次数趋向无穷时, 关节位置误差 $\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}$ 能够跟踪期望误差轨迹 $\tilde{\mathbf{q}}_{1,k}^*$. 根据期望误差轨迹 (8) 的定义可得, 当 $t \in [\Delta, T_k]$ 时, 关节位置误差以概率 1 收敛至 0, 即在 $t \in [\Delta, T_k]$ 时, 关节位置 $\mathbf{q}_{1,k}$ 能够实现期望轨迹的完全跟踪. \square

注 6. 根据式 (17) 和式 (22) 可知, 如果控制器的参数 c_1 和 c_2 选取过大, 则导致高增益控制; 如果控制参数选取过小, 则会减慢误差收敛速度. 学习律 (23) 和 (24) 的学习增益 η , γ 选取过小, 会导致迭代学习控制的学习速率下降; 但如果选取过大, 则可能出现不必要的振荡, 甚至导致系统状态发散.

5 仿真分析

考虑一个 2 自由度机械臂系统, 其表达式为^[30]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_{1,k} = \mathbf{q}_{2,k} \\ \mathbf{M}(\mathbf{q}_{2,k})\dot{\mathbf{q}}_{2,k} + \mathbf{C}(\mathbf{q}_{1,k}, \mathbf{q}_{2,k})\mathbf{q}_{2,k} + \mathbf{G}(\mathbf{q}_{1,k}) = \boldsymbol{\tau}_k + \mathbf{d}_k \end{cases} \quad (46)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{1,k} &= [q_{11,k}, q_{12,k}]^T, \mathbf{q}_{2,k} = [q_{21,k}, q_{22,k}]^T \\ \mathbf{M}(\mathbf{q}_{2,k}) &= [M_{11}, M_{12}; M_{21}, M_{22}] \\ M_{11} &= m_1 L_1^2 + m_2 (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos(q_{12,k})) \\ M_{12} &= M_{21} = m_2 (L_2^2 + L_1 L_2 \cos(q_{12,k})) \\ M_{22} &= m_2 L_2^2, C_r = m_2 L_1 L_2 \sin(q_{12,k}) \\ \mathbf{C}(\mathbf{q}_{1,k}, \mathbf{q}_{2,k}) &= [-C_r q_{22,k}, -C_r (q_{21,k} + q_{22,k}); C_r q_{21,k}, 0], \mathbf{G}(\mathbf{q}_{1,k}) = [G_1, G_2]^T \\ G_1 &= (m_1 + m_2) L_1 g \cos(q_{11,k}) + m_2 L_2 g \cos(q_{11,k} + q_{12,k}) \\ G_2 &= m_2 L_2 g \cos(q_{11,k} + q_{12,k}) \end{aligned}$$

方法 1 (M1). 本文提出的误差跟踪迭代学习控制方法, 包括控制器 (17), (22) 和学习律 (23), (24).

控制器 (22) 中的回归矩阵 \mathbf{W}_k 如下所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_k &= [W_{11}, W_{12}; W_{21}, W_{22}] \\ W_{11} &= L_1^2 (\ddot{q}_{d1} + \dot{\alpha}_{1,k}) + L_1 g \cos(q_{11,k}), W_{21} = 0 \\ W_{12} &= (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos(q_{12,k})) (\ddot{q}_{d1} + \dot{\alpha}_{1,k}) - L_1 L_2 \sin(q_{12,k}) [(q_{21,k} + q_{22,k}) (\dot{q}_{d2} + \alpha_{2,k}) + \end{aligned}$$

$$q_{22,k} (\dot{q}_{d1} + \alpha_{1,k})] + L_1 g \cos(q_{11,k}) + L_2 g \cos(q_{11,k} + q_{12,k})$$

$$\begin{aligned} W_{22} &= (L_2^2 + L_1 L_2 \cos(q_{12,k})) (\ddot{q}_{d1} + \dot{\alpha}_{1,k}) + L_1 L_2 q_{21,k} \sin(q_{12,k}) (\dot{q}_{d1} + \alpha_{1,k}) + L_2^2 (\ddot{q}_{d2} + \dot{\alpha}_{2,k}) + L_2 g \cos(q_{11,k} + q_{12,k}) \end{aligned}$$

方法 2 (M2). 机械臂自适应控制方法, 其虚拟控制器和实际控制器分别设计为

$$\boldsymbol{\alpha} = -c_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{q}_d \quad (47)$$

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{z}_1 - c_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{W} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \bar{d} \text{sgn}(\mathbf{z}_2) \quad (48)$$

其中, 未知参数 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 的自适应更新律设计为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = -\mathbf{W}^T \mathbf{z}_2 + \varepsilon \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (49)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}' &= [W'_{11}, W'_{12}; W'_{21}, W'_{22}] \\ W'_{11} &= L_1^2 \dot{\alpha}_{1,k} + L_1 g \cos(q_{11}), W'_{21} = 0 \\ W'_{12} &= (L_1^2 + L_2^2 + 2L_1 L_2 \cos(q_{12})) \dot{\alpha}_{1,k} - L_1 L_2 \sin(q_{12}) [(q_{21} + q_{22}) \alpha_2 + q_{22} \alpha_{1,k}] + L_1 g \cos(q_{11}) + L_2 g \cos(q_{11} + q_{12}) \\ W'_{22} &= (L_2^2 + L_1 L_2 \cos(q_{12})) \dot{\alpha}_{1,k} + L_1 L_2 q_{21} \sin(q_{12}) \alpha_1 + L_2^2 \dot{\alpha}_2 + L_2 g \cos(q_{11} + q_{12}) \end{aligned}$$

仿真中系统初值设置为随机变量 $\mathbf{q}_{1,k}(0) = [1 + 0.5 \text{rand}(1), 0.5 + 0.4 \text{rand}(1)]^T$, 设置每次的迭代长度 T_k 均匀分布在 $[4, 5]$ s, 期望迭代长度为 $T_{\max} = 5$ s, 期望轨迹给定为 $\mathbf{q}_d = [0.2 \cos(0.5\pi t), 0.1 \sin(\pi t) + 0.1 \cos(\pi t)]^T$.

为保证对比公平性, 机械臂系统参数均设置相同, 即 $L_1 = L_2 = 0.5$ m, $g = 9.81$ m/s², $m_1 = m_2 = 1$ kg, $\mathbf{d}_k = [0.3 \times \text{rand}(1) \sin(t), 0.2 \times \text{rand}(1) \cos(t)]^T$. M1 和 M2 的控制器参数设置为 $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $\bar{d} = 0.3$, M1 的学习律参数设置为 $\eta = 0.08$, $\gamma = 0.01$. M2 的自适应律参数设置为 $\varepsilon = 0.01$. 期望误差轨迹的接入点设为 $\Delta = 0.5$ s, 参数选择为 $a = 2 \ln(2 - \sqrt{3})$. 定义性能指标 $\text{avg}(\|\mathbf{z}_{1,k}(t)\|) = \frac{\sum_{i=1}^{T_k/tc} (\|\mathbf{z}_{1,k}(i \cdot tc)\|)}{T_k/tc}$ 和 $J_{\max} = \max_{t \in [0, T_k]} (\|\mathbf{z}_{1,k}(t)\|)$ 反映跟踪性能随迭代次数变化的情况. 其中, $\text{avg}(\|\mathbf{z}_{1,k}(t)\|)$ 表示在每次迭代过程中, 先对每个采样时刻的值进行累加求和, 然后再针对每次迭代时间求平均值. T_k 表示迭代长度, tc 表示采样间隔, $\|\mathbf{z}_{1,k}(t)\|$ 表示第 i 个采样时刻的 $\mathbf{z}_{1,k}(t)$ 的欧几里得范数值.

仿真结果如图 3 ~ 11 所示. 图 3 和图 4 分别描述关节位置 $q_{11,k}$ 和 $q_{12,k}$ 对期望轨迹 q_{d1} 和 q_{d2} 的跟踪效果. 其中, $q_{11,1}$, $q_{11,10}$, $q_{11,30}$ 分别表示在第 1 次、第 10 次和第 30 次迭代后的机械臂第 1 个关节位置的输出; $q_{12,1}$, $q_{12,10}$, $q_{12,30}$ 则分别表示在

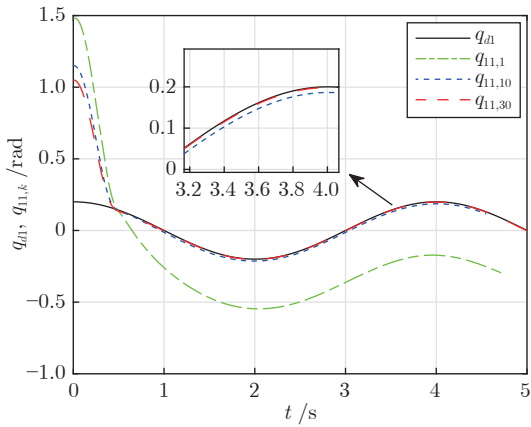


图 3 关节位置 $q_{11,k}$ 和期望位置信号 q_{d1}
 Fig.3 Joint position $q_{11,k}$ and desired position signal q_{d1}

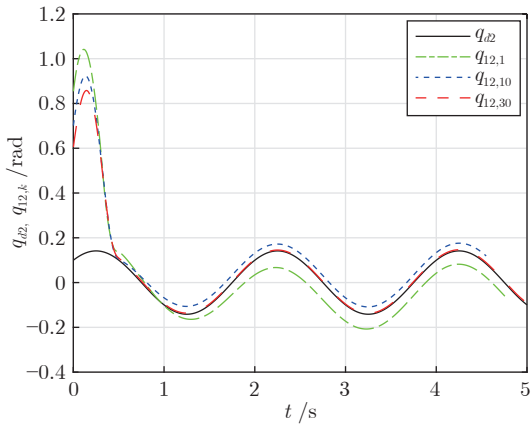


图 4 关节位置 $q_{12,k}$ 和期望位置信号 q_{d2}
 Fig.4 Joint position $q_{12,k}$ and desired position signal q_{d2}

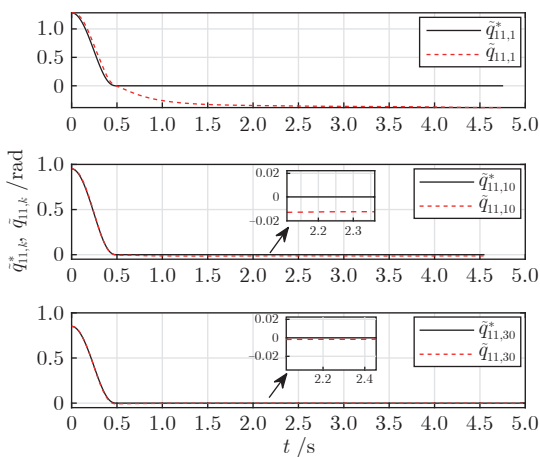


图 5 误差轨迹 $\tilde{q}_{11,k}$ 和期望误差轨迹 $\tilde{q}_{11,k}^*$
 Fig.5 Error trajectory $\tilde{q}_{11,k}$ and desired error trajectory $\tilde{q}_{11,k}^*$

第 1 次、第 10 次和第 30 次迭代后的机械臂第 2 个关节位置的输出. 由图 3 和图 4 可知, 在任意初始状态下, 经过足够多的迭代以后, 本文所提的变长度误差跟踪迭代学习控制方法能够实现关节位置在指定区间跟踪期望轨迹, 且在经过 30 次迭代之后, 两个关节位置的跟踪精度均优于第 1 次和第 10 次迭代的跟踪精度. 图 5 和图 6 分别表示两个关节位置误差对期望误差轨迹的跟踪情况, 可以发现两个关节位置误差在整个迭代长度内沿期望误差轨迹收敛. 此外, 在 $t = 0.5\text{ s}$ 后, 本文所提方法能够保证机械臂两个关节位置误差均收敛至零点附近, 这与前述理论分析结果保持一致. 图 7 描述了性能指标 $\text{avg}(\|z_{1,k}(t)\|)$ 以及 J_{\max} 随迭代次数的变化趋势. 由图 7 可知, 随着迭代次数的增加, 本文所提方法能够有效提高跟踪误差的收敛性能.

图 8 和图 9 分别表示 M1 和 M2 两种控制方法下关节位置 $q_{11,k}$ 和 $q_{12,k}$ 对期望轨迹 q_{d1} 和 q_{d2} 的跟踪效果. 图 10 和图 11 表示两种控制方法下关节位

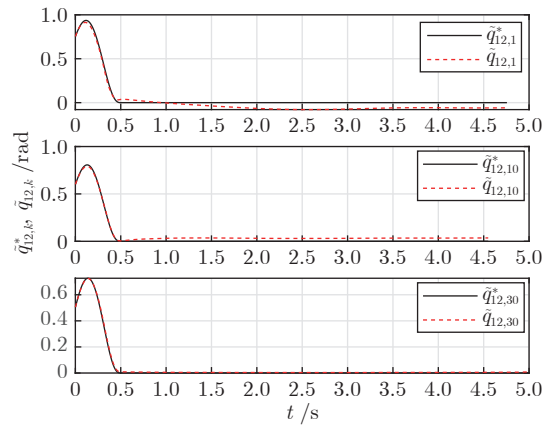


图 6 误差轨迹 $\tilde{q}_{12,k}$ 和期望误差轨迹 $\tilde{q}_{12,k}^*$
 Fig.6 Error trajectory $\tilde{q}_{12,k}$ and desired error trajectory $\tilde{q}_{12,k}^*$

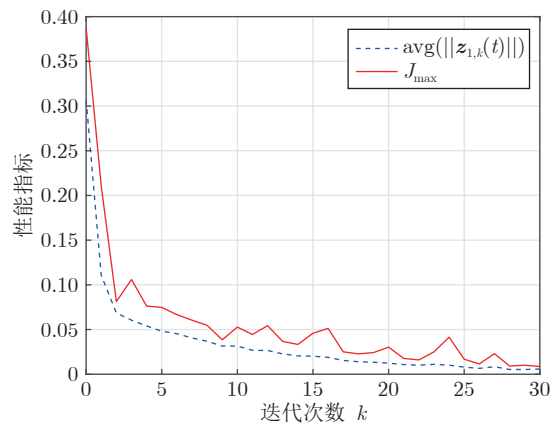


图 7 性能指标
 Fig.7 Performance index

置误差的收敛过程. 由图 8 ~ 11 可知, 在本文提出的 M1 控制方法下, 关节位置 $q_{11,k}$ 和 $q_{12,k}$ 的跟踪速度更快, 跟踪性能得到较大提升, 误差收敛速度也更快, 使得误差能够在指定区间内跟踪给定的期望误差轨迹. 图 3 ~ 11 的仿真结果表明, 针对任意初始状态下机械臂轨迹跟踪问题, 本文提出的变长度误差跟踪迭代学习控制方法能够实现关节位置误差在指定区间收敛到零点, 保证关节位置在指定区间内跟踪给定期望轨迹.

6 结束语

针对机械臂迭代学习控制方法的初值与不等长问题, 本文提出一种变长度误差跟踪迭代学习控制方法. 为放宽系统的初值一致条件, 利用双曲余弦函数构造期望误差轨迹, 该期望误差轨迹只需设计一个与期望轨迹无关的常数项, 使得误差轨迹形式较为简单和直观. 针对 ILC 不等长问题, 定义虚拟跟踪变量构建误差补偿机制, 补偿未运行区间的误

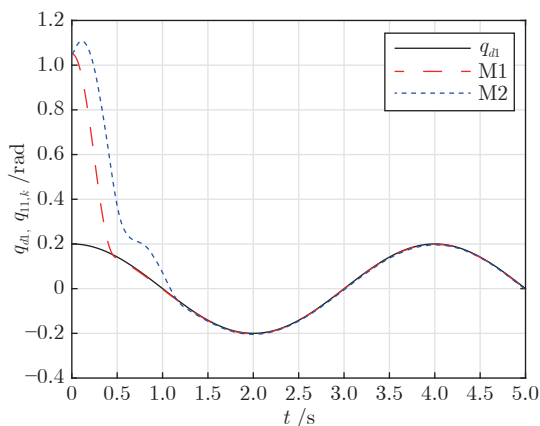


图 8 关节位置 $q_{11,k}$ 跟踪性能对比

Fig. 8 The comparison of joint position $q_{11,k}$ tracking performance

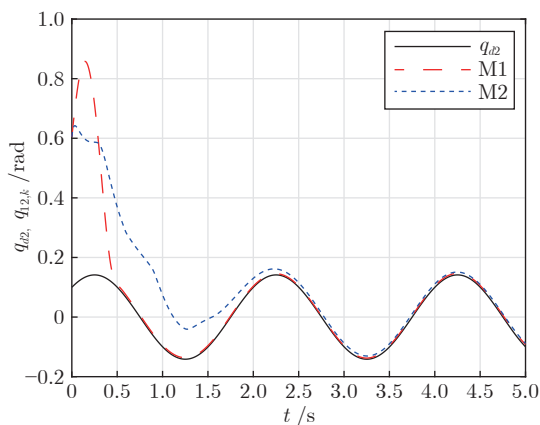


图 9 关节位置 $q_{12,k}$ 跟踪性能对比

Fig. 9 The comparison of joint position $q_{12,k}$ tracking performance

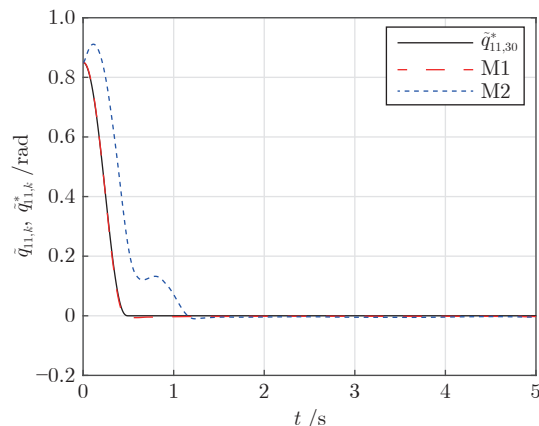


图 10 关节位置误差 $\tilde{q}_{11,30}$ 收敛过程对比

Fig. 10 The comparison of the error $\tilde{q}_{11,30}$ convergence processes

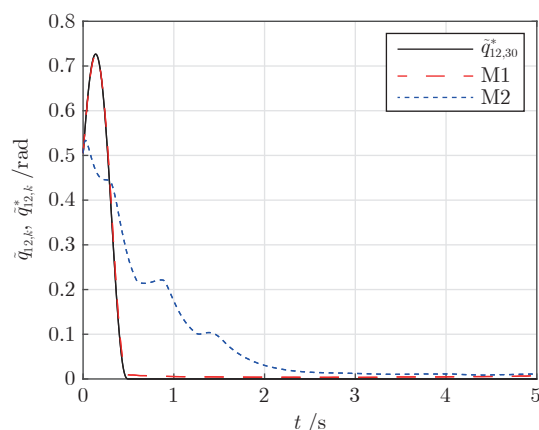


图 11 关节位置误差 $\tilde{q}_{12,30}$ 收敛过程对比

Fig. 11 The comparison of the error $\tilde{q}_{12,30}$ convergence processes

差信息, 并在此基础上设计迭代学习控制器, 保证关节位置在指定区间上跟踪给定的期望轨迹. 此外, 设计全限幅学习律, 保证参数估计值的有界性. 仿真结果验证了本文所提控制方法的有效性.

References

- 1 Bondi P, Casalino G, Gambardella L. On the iterative learning control theory for robotic manipulators. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 1988, 4(1): 14-22
- 2 Tayebi A. Adaptive iterative learning control for robot manipulators. *Automatic*, 2004, 40(7): 1195-1203
- 3 Wu B, Wang D, Poh E K. High precision satellite attitude tracking control via iterative learning control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015, 38(3): 528-534
- 4 Hu Y N, Wei J M, Sun M M. Adaptive repetitive learning control for trajectory-keeping of satellite formation flying. *Journal of Control and Decision*, 2014, 1(4): 317-331
- 5 Xu Jian-Ming, Wang Yao-Dong, Sun Ming-Xuan. Iterative learning control based on extracting initial iterative control signals. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(2): 294-306 (徐建明, 王耀东, 孙明轩. 基于初次控制信号提取的迭代学习控制方法. *自动化学报*, 2020, 46(2): 294-306)
- 6 Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Better operation of ro-

- bots by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1984, **1**(2): 123-140
- 7 Sun Ming-Xuan, Huang Bao-Jian. *Iterative Learning Control*. Beijing: National Defense Industry Press, 1999.
(孙明轩, 黄宝健. 迭代学习控制. 北京: 国防工业出版社, 1999.)
- 8 Xie Sheng-Li, Tian Sen-Ping, Xie Zhen-Dong. *Theory and Application of Iterative Learning Control*. Beijing: Science Press, 2005.
(谢胜利, 田森平, 谢振东. 迭代学习控制的理论与应用. 北京: 科学出版社, 2005.)
- 9 Yu Q X, Hou Z S, Xu J X. D-type ILC based dynamic modeling and norm optimal ILC for highspeed trains. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2018, **26**(2): 652-663
- 10 Xu J X, Xu J. On iterative learning from different tracking tasks in the presence of timevarying uncertainties. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, Part B Cybernetics*, 2004, **34**(1): 589-597
- 11 Tayebi A, Chien C. A unified adaptive iterative learning control framework for uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, **52**(10): 1907-1913
- 12 Zhu Sheng, Sun Ming-Xuan, He Xiong-Xiong. Iterative learning control of strict-feedback nonlinear time-varying systems. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(3): 454-458
(朱胜, 孙明轩, 何熊熊. 严格反馈非线性时变系统的迭代学习控制. 自动化学报, 2010, **36**(3): 454-458)
- 13 Sun M X. A Barbalat-like lemma with its application to learning control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, **54**(9): 2222-2225
- 14 Lv Qing. Adaptive iterative learning control for inhibition effect of initial state random error. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(7): 1365-1372
(吕庆. 抑制初态误差影响的自适应迭代学习控制. 自动化学报, 2015, **41**(7): 1365-1372)
- 15 Xu J X, Tan Y. A composite energy functionbased learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(11): 1940-1945
- 16 Ji H H, Hou Z S, Zhang R K. Adaptive iterative learning control for high-speed trains with unknown speed delays and input saturations. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2016, **13**(1): 260-273
- 17 Sugie T, Ono T. An iterative learning control law for dynamical systems. *Automatica*, 1991, **27**(4): 729-732
- 18 Chien C J, Hsu C T, Yao C Y. Fuzzy systembased adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state errors. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, **12**(5): 724-732
- 19 Xu J X, Yan R. On initial conditions in iterative learning control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, **50**(9): 1349-1354
- 20 Jin X. Nonrepetitive leader-follower formation tracking for multiagent systems with LOS range and angle constraints using iterative learning control. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, **49**(5): 1748-1758
- 21 Sun Ming-Xuan, Yan Qiu-Zhen. Error tracking of iterative learning control systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(3): 251-262
(孙明轩, 严求真. 迭代学习控制系统的误差跟踪设计方法. 自动化学报, 2013, **39**(3): 251-262)
- 22 Sun M X, Wu T, Chen L J, Zhang G F. Neural AILC for error tracking against arbitrary initial shifts. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, **29**(7): 2705-2716
- 23 Chen Q, Shi H H, Sun M X. Echo state network-based backstepping adaptive iterative learning control for strict-feedback systems: An error-tracking approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, **50**(7): 3009-3022
- 24 Li X F, Xu J X, Huang D Q. An iterative learning control approach for linear systems with randomly varying trial lengths. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, **59**(7): 1954-1960
- 25 Li X F, Xu J X. Lifted system framework for learning control with different trial lengths. *International Journal of Automa-*

tion and Computing, 2015, **12**(3): 273-280

- 26 Shen D, Zhang W, Wang Y Q, Chien C J. On almost sure and mean square convergence of P-type ILC under randomly varying iteration lengths. *Automatica*, 2016, **63**(1): 359-365
- 27 Shi J T, Xu J X, Sun J, Yang Y H. Iterative learning control for time-varying systems subject to variable pass lengths: Application to robot manipulators. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2020, **67**(10): 8629-8637
- 28 Shen D, Xu J X. Adaptive learning control for nonlinear systems with randomly varying iteration lengths. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, **30**(4): 1119-1132
- 29 Jin X. Iterative learning control for MIMO nonlinear systems with iteration-varying trial lengths using modified composite energy function analysis. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, **51**(12): 6080-6090
- 30 Zeng C, Shen D, Wang J R. Adaptive learning tracking for robot manipulators with varying trial lengths. *Journal of the Franklin Institute*, 2019, **356**(12): 5993-6014



陈强 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为自适应控制与学习控制.

E-mail: sdnjchq@zjut.edu.cn

(**CHEN Qiang** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology.)

His research interest covers adaptive control and learning control.)



陈凯杰 浙江工业大学信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为自适应控制与学习控制.

E-mail: chenkaiejie0528@163.com

(**CHEN Kai-Jie** Master student at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Tech-

nology. His research interest covers adaptive control and learning control.)



施卉辉 浙江工业大学信息工程学院博士研究生. 主要研究方向为自适应控制与学习控制.

E-mail: shidemelei@163.com

(**SHI Hui-Hui** Ph.D. candidate at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Tech-

nology. Her research interest covers adaptive control and learning control.)



孙明轩 浙江工业大学信息工程学院教授. 主要研究方向为自适应控制与学习控制. 本文通信作者.

E-mail: mxsun@zjut.edu.cn

(**SUN Ming-Xuan** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology.)

His research interest covers adaptive control and learning control. Corresponding author of this paper.)