

# 非线性系统自适应最优切换控制方法

毛艳岭<sup>1</sup> 富月<sup>1</sup>

**摘要** 针对具有未知动态和  $M$  个平衡点的连续时间非线性系统, 将线性自适应最优切换控制器和未建模动态补偿器相结合, 基于嵌入转换技术和近似动态规划思想, 提出一种自适应最优切换控制方法. 首先在非线性的  $M$  个平衡点建立  $M$  个线性化模型, 当模型参数已知时, 提出由线性最优切换控制器、切换准则、未建模动态补偿器以及非线性系统组成的控制系统结构; 当模型参数未知时, 在每个平衡点附近采集输入和状态数据, 利用黎卡提方程的迭代求解公式、最小二乘方法、极小值原理以及二次规划技术得到非线性系统的自适应最优切换控制器和最优切换序列; 最后进行仿真实验, 实验结果验证了所提方法的有效性、优越性和实际可应用性.

**关键词** 非线性系统, 切换控制, 自适应最优控制, 嵌入转换

**引用格式** 毛艳岭, 富月. 非线性系统自适应最优切换控制方法. 自动化学报, 2023, 49(10): 2122–2135

**DOI** 10.16383/j.aas.c220180

## Adaptive Optimal Switching Control of Nonlinear Systems

MAO Yan-Ling<sup>1</sup> FU Yue<sup>1</sup>

**Abstract** In this paper, for continuous-time nonlinear systems with unknown dynamics and  $M$  equilibrium points, based on embedding-transformation and approximate dynamic programming, an adaptive optimal switching control method is proposed by combining a linear adaptive optimal switching controller and an unmodeled dynamic compensator. Firstly,  $M$  linearized models are established at  $M$  equilibrium points of the nonlinear system. When the model parameters are known, a control system structure consisting of a linear optimal switching controller, a switching mechanism, an unmodeled dynamic compensator, and the nonlinear system is proposed. When the model parameters are unknown, the input and state data are collected at the neighborhood of each equilibrium point. Then the adaptive optimal switching controller and optimal switching sequence are obtained by using the iterative Riccati equation, least square method, minimum principle, and quadratic programming. Finally, simulations are conducted, and the results verify the effectiveness, superiority and applicability of the proposed method.

**Key words** Nonlinear systems, switching control, adaptive optimal control, embedding-transformation

**Citation** Mao Yan-Ling, Fu Yue. Adaptive optimal switching control of nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2023, 49(10): 2122–2135

实际工业过程的被控对象大多是非线性的, 比如电熔镁砂熔炼过程的电极、钢球磨煤机制粉过程的磨机等等. 非线性系统结构复杂, 往往难以得到精确的数学模型, 其控制问题一直是控制领域相关学者和工程师的研究难点和热点之一.

经典的非线性控制方法, 如反馈线性化方法<sup>[1-2]</sup>, 由于需要已知精确的数学模型, 无法应用到实际的工业过程中. 为了解决这个问题, 文献 [3] 针对具有全状态约束的高阶非线性随机系统, 利用模糊逻辑

系统逼近未知非线性函数, 提出了一种新的模糊自适应反步控制方法. 文献 [4] 在文献 [3] 的基础上, 针对具有指数型性能函数的高阶非线性随机系统, 提出了基于模糊逻辑系统和反步法的模糊自适应有限时间跟踪控制方法. 当被控对象的非线性较弱或在某一平衡点附近运行时, 通常采用近似线性模型进行描述, 并针对该模型设计控制器. 例如, 文献 [5] 利用递归近似理论, 将非线性系统看作线性时变序列系统的极限, 针对线性时变序列系统设计线性二次最优序列控制器, 从而实现原非线性系统的二次最优控制. 文献 [6] 利用泰勒公式将非线性系统在某一平衡点附近表示为线性模型与高阶非线性项的组合, 将开环解耦补偿器、非线性神经网络补偿器和一步超前最优加权自适应控制器结合, 提出了非线性系统基于神经网络的自适应动态解耦控制方法. 文献 [7] 考虑到模型阶次的不匹配问题, 通过引入降阶模型, 采用带死区的归一化投影算法对线性

收稿日期 2022-03-16 录用日期 2023-02-24

Manuscript received March 16, 2022; accepted February 24, 2023

国家自然科学基金 (62333004, 61991403, 61991400, 61873052) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62333004, 61991403, 61991400, 61873052)

本文责任编辑 赵旭东

Recommended by Associate Editor ZHAO Xu-Dong

1. 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室 沈阳 110819

1. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110819

模型参数进行辨识, 利用高阶神经网络估计高阶非线性项, 将带有滤波器的极点配置自适应比例积分微分 (Proportional integral derivative) 控制器与神经网络补偿器相结合, 提出了非线性系统基于神经网络的自适应 PID 控制方法. 神经网络收敛速度较慢且容易陷入局部极小点, 高阶非线性项的估计精确度较低. 为了解决这一问题, 文献 [8] 首次引入了控制器驱动模型和虚拟未建模动态的概念, 基于线性控制器驱动模型构造一步超前最优自适应控制器, 结合虚拟未建模动态补偿器, 提出了非线性系统自适应切换控制方法. 文献 [9] 针对复杂的热交换过程, 设计了具有虚拟未建模动态补偿的一步最优比例积分 (Proportional integral) 控制器, 并提出了数据驱动的双速率控制方法. 上述控制方法虽然能够取得良好的控制效果, 但是当系统的非线性较强或平衡点发生变化时, 这种只考虑单一平衡点的控制方法往往会使得控制性能下降甚至导致整个系统失稳.

很多实际工业过程的平衡点都会随着工况的不同而发生变化, 比如电熔镁砂熔炼过程的平衡点随着原料成分和加料阶段的不同会发生变化; 钢球磨煤机制粉系统中磨机的平衡点随着原煤成分和湿度的不同而发生变化. 本文针对一类具有  $M$  个平衡点的非线性系统, 研究基于多模型切换的自适应控制方法. 多模型自适应控制方法一般用于改善系统的暂态性能或解决参数跳变系统的控制问题, 如文献 [10] 针对一类连续时间线性系统, 为改善系统的暂态性能, 提出了基于直接模型参考自适应控制的多模型切换控制方法. 文献 [11] 针对一类参数跳变离散时间线性系统, 提出了基于间接自校正控制的多模型切换控制方法. 文献 [12] 针对一类参数跳变离散时间非线性系统, 通过引入  $k$ - 差分算子, 分别设计了线性自适应控制器和基于神经网络的非线性自适应控制器, 通过两个控制器之间的切换, 可以提高系统的性能和稳定性. 为了避免不良切换行为, 文献 [13] 采用滞后切换逻辑消除了参数估计器对初始条件的依赖, 通过利用鲁棒线性时不变工具实现高性能的控制目标, 结合控制器混合策略, 提出了多模型自适应混合控制方法. 针对文献 [13] 所提方法需要模型数量大的问题, 文献 [14] 采用分离处理原则, 充分利用所有辨识模型信息, 采用二级自适应方法建立自适应控制器. 为了消除系统非线性项对控制输入应严格线性的限制, 文献 [15] 针对离散时间非线性系统, 采用极点配置控制方法, 提出了由线性间接自校正控制器、基于神经网络的非线性间接自校正控制器和切换机制组成的多模型自适应控制器. 很多研究将多模型自适应控制方法应用

到实际系统中, 并且取得了较好的控制效果. 文献 [16] 将多模型自适应切换控制方法应用于电力系统低频振荡中, 建立了不同工况下的线性小信号模型, 采用递归贝叶斯方法计算每个模型代表实际电力系统的概率, 根据这个概率得到每个控制器输出的占比权重, 最终的控制输出即为每个控制器输出的概率加权平均值. 文献 [17] 针对动态特性随不同负载状态而变化的柔性传送系统, 分别在不同负载状态处建立线性模型, 提出了基于闭环输出误差最小化的参数估计算法和基于极点配置的多模型自适应切换控制方法. 文献 [18] 以钢球磨煤机制粉系统为例, 针对一类具有多变量强耦合强非线性且动态特性随不同运行条件而变化的复杂工业过程, 将其在不同平衡点处用不同的线性模型和非线性未建模动态项组成的估计模型来描述, 提出了由非线性解耦控制器、线性解耦控制器和多模型切换机制组成的智能解耦控制方法. 文献 [19] 针对串联电容补偿输电线路的风力系统次同步谐振问题, 采用传统线性控制方法设计控制器, 根据系统条件设计该控制器的监控控制器, 该方法之后被拓展到了双馈异步发电机在串联补偿输电系统中的次同步振荡问题<sup>[20]</sup>. 上述多模型控制方法中, 用于切换的控制器是针对单一时刻的性能指标设计的, 具有次优性, 无法保证切换序列和控制系统的最优性.

在实际工业生产过程中, 保证控制系统性能最优对实现工业过程整体优化控制是至关重要的. 本文针对具有未知动态和  $M$  个平衡点的连续时间非线性系统, 将嵌入转换法和近似动态规划技术相结合, 提出了一种自适应最优切换控制方法, 一方面能够保证切换序列的最优性, 另一方面可以实现控制系统的最优性能, 改善控制系统的动态品质. 首先在非线性的  $M$  个平衡点附近采集  $M$  组输入和状态数据, 利用黎卡提方程的迭代求解公式和最小二乘方法得到针对每个线性模型的最优控制器增益的估计, 利用极小值原理得到  $M$  个近似线性化模型. 然后利用嵌入转换法将  $M$  个近似线性化模型嵌入到一个连续时间大系统中, 通过二次规划技术得到非线性系统的线性自适应最优切换控制器和最优切换序列. 最后, 将线性自适应最优切换控制器和未建模动态补偿器相结合, 实现了控制目标. 仿真实验验证了本文所提方法的有效性、优越性和实际可应用性.

本文针对具有未知动态和  $M$  个平衡点的连续时间非线性系统, 提出了自适应最优切换控制方法. 主要创新点如下:

1) 提出了由线性最优切换控制器、切换准则和未建模动态补偿器组成的控制器结构;

2) 模型参数已知时, 基于嵌入转换技术提出了由  $M$  个模型、 $M$  个最优控制器和切换准则组成的线性最优切换控制器;

3) 模型参数未知时, 基于嵌入转换技术和近似动态规划思想提出了由  $M$  个近似线性化模型、 $M$  个自适应最优控制器和切换准则组成的线性自适应最优切换控制器.

## 1 问题描述

考虑由如下模型描述的具有  $M$  个平衡点的连续时间非线性非仿射系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

其中  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  是  $n$  维状态向量,  $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]^T$  是  $m$  维控制输入向量,  $f(x(t), u(t)) = [f_1(\cdot, \cdot), f_2(\cdot, \cdot), \dots, f_n(\cdot, \cdot)]^T : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$  表示连续可微的未知非线性向量函数.

本文的目标是针对具有  $M$  个平衡点的未知非线性系统 (1), 寻找最优切换序列和自适应最优切换控制律  $u(t)$ , 使得闭环系统渐近稳定.

非线性非仿射系统结构复杂, 很难直接根据它的模型设计控制器. 通常的做法是将非线性系统在某一平衡点附近线性化, 针对等价的近似线性模型设计控制器, 从而实现对原非线性系统的有效控制, 如文献 [4-5] 等. 为此本文将非线性系统 (1) 在  $M$  个平衡点附近泰勒展开, 得到第  $i \in \{1, 2, \dots, M\}$  个平衡点  $(x_i, u_i)$  附近的等价近似线性模型:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + v_i(t) \quad (2)$$

等价模型 (2) 包括两部分, 第一部分  $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$  表示第  $i$  个平衡点附近的线性化模型  $i$ , 其中  $A_i = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{u=u_i \\ x=x_i}}$  和  $B_i = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\substack{u=u_i \\ x=x_i}}$  为适当维数的未知常值矩阵且  $(A_i, B_i)$  可控; 第二部分  $v_i(t)$  为第  $i$  个平衡点附近的未建模动态. 为建立非线性系统 (1) 在  $M$  个平衡点附近的控制器设计模型, 引入如下单位脉冲序列记号

$$\delta(b) = \begin{cases} 1, & b = 0 \\ 0, & b \neq 0 \end{cases}$$

其中  $b$  是整数, 则系统 (1) 可表示为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \delta(\sigma(t) - i) [A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} u(t) + v_{\sigma(t)}] \quad (3)$$

其中  $\sigma(t) \in \{1, 2, \dots, M\}$  表示切换信号. 与此同时, 本文所提出的控制器结构也包括两部分, 第一部分根据基于线性化模型建立的如下控制器设计模型进行设计:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \delta(\sigma(t) - i) [A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} u(t)] \quad (4)$$

第二部分根据线性化产生的建模误差来设计, 用于消除未建模动态影响, 实现闭环系统渐近稳定.

在不引起混淆的情况下, 接下来我们将  $\sum_{i=1}^M \delta(\sigma(t) - i)$  简化为  $\sum_i \delta(\sigma(t) - i)$ .

## 2 自适应最优切换控制器设计

### 2.1 参数已知时的最优切换控制器

当  $A_i$  和  $B_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) 已知时, 我们提出了如图 1 所示的由线性最优切换控制器、切换准则、未建模动态补偿器以及非线性系统组成的控制系统结构, 其中线性最优切换控制器和切换准则根据控制器设计模型 (4), 利用嵌入转换法<sup>[21]</sup>、极小值原理和二次规划方法获得; 未建模动态补偿器根据非线性系统状态和最优模型状态之间的误差设计.

首先令  $\delta(\sigma(t) - i)$  在区间  $[0, 1]$  内连续变化, 利用嵌入转换法将式 (4) 嵌入到一个连续时间大系统中. 然后根据该嵌入式连续时间大系统的最优控制问题:

$$\begin{aligned} \min V &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \\ \text{s.t. } \dot{x}(t) &= \sum_i \delta(\sigma(t) - i) [A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} u(t)] \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $\delta(\sigma(t) - i) \in [0, 1]$ ,  $Q$ 、 $R$  为适当维数的参数矩阵且  $(A_{\sigma(t)}, \sqrt{Q})$  可观, 采用极小值原理和二次规划方法得到切换准则函数:

$$\begin{aligned} J_{\sigma(t)} &= x^T(t) P_{\sigma(t)} A_{\sigma(t)} x(t) - \\ &\quad \frac{1}{2} x^T(t) P_{\sigma(t)} B_{\sigma(t)} R^{-1} B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)} x(t) \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $P_{\sigma(t)}$  根据如下黎卡提方程求解:

$$\begin{aligned} P_{\sigma(t)} A_{\sigma(t)} + A_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)} - \\ P_{\sigma(t)} B_{\sigma(t)} R^{-1} B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)} + Q = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

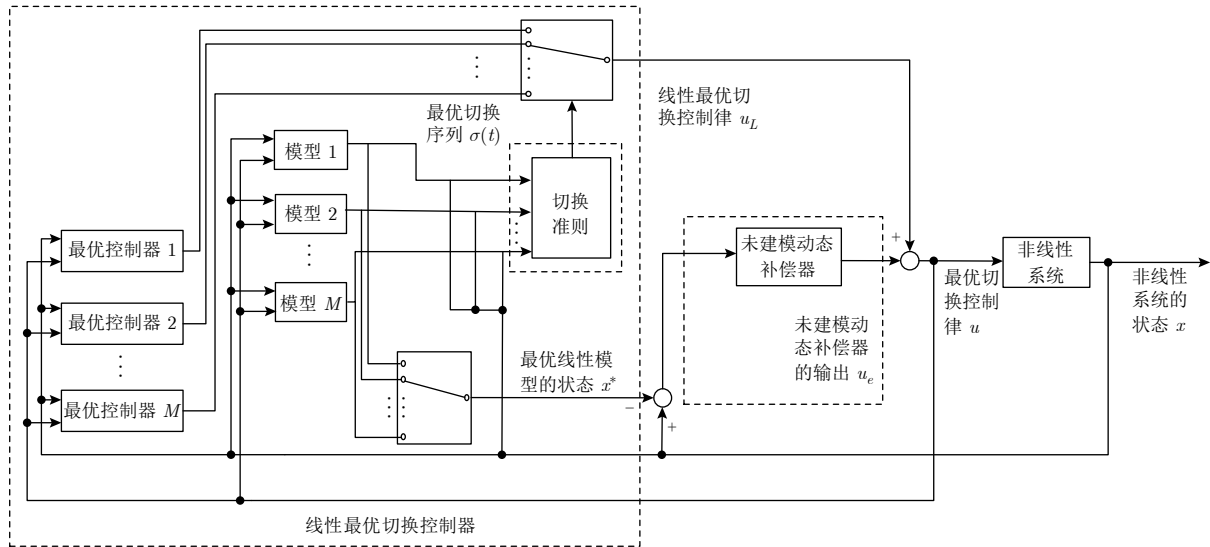
每一时刻, 比较  $J_{\sigma(t)}$ , 选择与最小的  $J_{\sigma(t)}$  对应的线性最优切换控制律:

$$u_L(t) = -K_{\sigma(t)} x(t) \quad (8)$$

其中  $\sigma(t)$  为最优切换序列,  $K_{\sigma(t)}$  表示线性最优切换控制器的增益, 通过下式求解:

$$K_{\sigma(t)} = R^{-1} B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)} \quad (9)$$

接下来, 为消除未建模动态对控制系统性能的影响, 我们设计了如下未建模动态补偿器:

图 1  $A_i$  和  $B_i$  已知时的控制系统结构Fig.1 Control system structure when  $A_i$  and  $B_i$  are known

$$u_e = \frac{a_1 e_m}{\|e_m\| + a_2} \quad (10)$$

其中  $a_1 \in \mathbf{R}^{m \times n}$  为可调参数矩阵,  $a_2$  为可调参数,  $e_m = x - x^*$  为建模误差,  $x^*$  为最优线性化模型  $\sigma(t)$  的状态.

综上,  $A_i$  和  $B_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) 已知时最优切换控制律为:

$$u = -K_{\sigma(t)}x(t) + \frac{a_1 e_m}{\|e_m\| + a_2} \quad (11)$$

**注 1.** 线性最优切换控制律和最优切换序列推导过程见附录 A.

**注 2.** 针对控制器设计模型 (4), 通过嵌入扩大  $\delta(\sigma(t) - i)$  的取值范围, 令  $\delta(\sigma(t) - i)$  在区间  $[0, 1]$  内连续变化, 将由多个近似线性模型组成的式 (4) 嵌入到一个连续时间大系统中; 通过转换将针对控制器设计模型 (4) 的最优切换控制问题转化为针对该嵌入式连续时间大系统的最优切换控制问题.

## 2.2 参数未知时的自适应最优切换控制器

当  $A_i$  和  $B_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) 未知时, 无法通过式 (7) 得到  $P_{\sigma(t)}$ , 无法得到如式 (6) 所示的切换准则函数和式 (8) 所示的线性最优切换控制律. 为解决这一问题, 本文提出了一种自适应最优切换控制方法. 首先在非线性的  $M$  个平衡点附近采集  $M$  组输入、状态数据, 利用黎卡提方程的迭代求解公式和最小二乘法得到针对线性化模型  $\sigma(t)$  的自适应最优控制器增益  $\hat{K}_{\sigma(t)}$  以及黎卡提方程近似解  $\hat{P}_{\sigma(t)}$ , 并根据贝尔曼方程得到  $P_{\sigma(t)}A_{\sigma(t)}$  的估计, 从而得到  $M$  个平衡点附近的  $M$  个线性化模型; 然后

将  $M$  个线性化模型嵌入到一个连续时间大系统中, 针对该嵌入式连续时间大系统基于极小值原理和二次规划技术设计线性二次型最优控制律, 进而得到最优切换序列和线性自适应最优切换控制律; 最后将线性自适应最优切换控制律和未建模动态补偿器相结合应用到非线性系统中, 实现对未知动态非线性系统的自适应最优切换控制.

针对控制器设计模型 (4), 当  $A_i$  和  $B_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) 已知时, 根据 Kleinman 定理<sup>[22]</sup>, 很容易得到如下推论:

**推论 1.** 令  $K_{\sigma(t), 0} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  为针对线性化模型  $\sigma(t)$  的稳定反馈控制器增益矩阵,  $P_{\sigma(t), k}$  为下面李雅普诺夫方程的对称正定解:

$$\begin{aligned} & \sum_i \delta(\sigma(t) - i)(A_{\sigma(t)} - B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t), k})^T P_{\sigma(t), k} + \\ & \sum_i \delta(\sigma(t) - i)P_{\sigma(t), k}(A_{\sigma(t)} - B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t), k}) + \\ & \sum_i \delta(\sigma(t) - i)K_{\sigma(t), k}^T R K_{\sigma(t), k} + Q = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\delta(\sigma(t) - i) \in \{0, 1\}$  且  $\sum_i \delta(\sigma(t) - i) = 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$  表示迭代次数,  $K_{\sigma(t), k}$  满足

$$\begin{aligned} & \sum_i \delta(\sigma(t) - i)K_{\sigma(t), k} = \\ & R^{-1} \sum_i \delta(\sigma(t) - i)B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t), k-1} \end{aligned} \quad (13)$$

则  $K_{\sigma(t), k}$  和  $P_{\sigma(t), k}$  分别收敛于针对线性化模型  $\sigma(t)$  的最优控制器增益  $K_{\sigma(t)}$  和黎卡提方程解  $P_{\sigma(t)}$ , 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_i \delta(\sigma(t) - i)K_{\sigma(t),k} = \sum_i \delta(\sigma(t) - i)K_{\sigma(t)} \tag{14a}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_i \delta(\sigma(t) - i)P_{\sigma(t),k} = \sum_i \delta(\sigma(t) - i)P_{\sigma(t)} \tag{14b}$$

**定理 1.** 针对控制器设计模型 (4), 当  $A_i$  和  $B_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) 未知时, 使性能指标

$$V = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \tag{15}$$

最小的切换准则函数为:

$$J_{\sigma(t)} = x^T(t)N_{\sigma(t)}x(t) - \frac{1}{2}x^T(t)\hat{K}_{\sigma(t)}^T RK_{\sigma(t)}x(t) \tag{16}$$

其中  $\hat{K}_{\sigma(t)}$  是针对线性化模型  $\sigma(t)$  的最优控制器增益  $K_{\sigma(t)}$  的估计, 根据式 (17) 求解;  $N_{\sigma(t)}$  是矩阵  $P_{\sigma(t)}A_{\sigma(t)}$  的估计, 根据式 (18) 求解:

$$\Theta_{\sigma(t)} \begin{bmatrix} \hat{P}_{\sigma(t)} \\ \text{vec}(\hat{K}_{\sigma(t)}) \end{bmatrix} = \Xi_{\sigma(t)} \tag{17}$$

$$\text{vec}(N_{\sigma(t)}) = [(x^T \otimes x^T)^T(x^T \otimes x^T)]^{-1} \times (x^T \otimes x^T)^T D_{\sigma(t)} \tag{18}$$

其中  $\Theta_{\sigma(t)}$ ,  $\hat{P}_{\sigma(t)}$  和  $\Xi_{\sigma(t)}$  的定义见后文,  $\text{vec}(C)$  是把  $m \times n$  维矩阵  $C$  按列的顺序一列接一列地组成的  $mn$  维向量,  $\otimes$  代表克罗内克积,

$$D_{\sigma(t)} = -\frac{1}{2}x^T Qx - \frac{1}{2}u^T Ru - x^T(R\hat{K}_{\sigma(t)})^T u$$

线性自适应最优切换控制律为:

$$u_L(t) = -\hat{K}_{\sigma(t)}x(t) \tag{19}$$

其中  $\sigma(t)$  为与最小的  $J_{\sigma(t)}$  对应的最优切换序列.

**证明.** 首先根据离线采集的  $M$  组输入、状态数据, 计算针对线性化模型  $\sigma(t)$  的自适应最优控制器增益  $\hat{K}_{\sigma(t)}$  以及黎卡提方程近似解  $\hat{P}_{\sigma(t)}$ . 受文献 [23] 启发, 将式 (4) 等价表示为:

$$\dot{x}(t) = \sum_i \delta(\sigma(t) - i)\{A_{\sigma(t),k}x(t) + B_{\sigma(t)} \times [K_{\sigma(t),k}x(t) + u(t)]\} \tag{20}$$

其中  $A_{\sigma(t),k} = A_{\sigma(t)} - B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t),k}$ . 根据式 (12) 和式 (13), 沿着式 (20) 的解, 可以得到

$$x^T(t + \delta t) \sum_i \delta(\sigma(t) - i)P_{\sigma(t),k}x(t + \delta t) - x^T(t) \sum_i \delta(\sigma(t) - i)P_{\sigma(t),k}x(t) =$$

$$\int_t^{t+\delta t} \sum_i \delta(\sigma(t) - i)[x^T(A_{\sigma(t),k}^T P_{\sigma(t),k} + P_{\sigma(t),k}A_{\sigma(t),k})x + 2(u + K_{\sigma(t),k}x)^T \times B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t),k}x]d\tau = - \int_t^{t+\delta t} x^T Q_{\sigma(t),k}x d\tau + 2 \int_t^{t+\delta t} \sum_i \delta(\sigma(t) - i)(u + K_{\sigma(t),k}x)^T RK_{\sigma(t),k+1}x d\tau \tag{21}$$

其中  $Q_{\sigma(t),k} = Q + \sum_i \delta(\sigma(t) - i)K_{\sigma(t),k}^T RK_{\sigma(t),k}$ . 由此, 可以将包含未知矩阵  $A_{\sigma(t)}$  和  $B_{\sigma(t)}$  的  $\sum_i \delta(\sigma(t) - i)[x^T(A_{\sigma(t),k}^T P_{\sigma(t),k} + P_{\sigma(t),k}A_{\sigma(t),k})x]$  项用  $-x^T \times Q_{\sigma(t),k}x$  代替. 同理, 可以将包含未知矩阵  $B_{\sigma(t)}$  的  $\sum_i \delta(\sigma(t) - i)B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t),k}$  用  $\sum_i \delta(\sigma(t) - i)RK_{\sigma(t),k+1}$  代替.

由克罗内克积的定义, 可知

$$x^T Q_{\sigma(t),k}x = (x^T \otimes x^T)\text{vec}(Q_{\sigma(t),k}) \tag{22}$$

$$\sum_i \delta(\sigma(t) - i)(u + K_{\sigma(t),k}x)^T RK_{\sigma(t),k+1}x = [(x^T \otimes x^T)(I_n \otimes \sum_i \delta(\sigma(t) - i) \times K_{\sigma(t),k}^T R) + (x^T \otimes u^T)(I_n \otimes R)] \times \sum_i \delta(\sigma(t) - i)\text{vec}(K_{\sigma(t),k+1}) \tag{23}$$

其中,  $I_n$  表示  $n$  维单位矩阵. 定义如下运算

$$P_{\sigma(t)} = \begin{bmatrix} p_{\sigma(t),11} & \cdots & p_{\sigma(t),1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{\sigma(t),n1} & \cdots & p_{\sigma(t),nn} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n} \rightarrow$$

$$\bar{P}_{\sigma(t)} = [p_{\sigma(t),11}, 2p_{\sigma(t),12}, \dots, 2p_{\sigma(t),1n}, p_{\sigma(t),22}, 2p_{\sigma(t),23}, \dots, 2p_{\sigma(t),(n-1)n}, p_{\sigma(t),nn}]^T \in \mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

$$x = [x_{11}, \dots, x_{nn}] \in \mathbf{R}^n \rightarrow$$

$$\bar{x} = [x_{11}^2, x_{11}x_{22}, \dots, x_{11}x_{nn}, x_{22}^2, x_{22}x_{33}, \dots, x_{n-1,n-1}x_{nn}, x_{nn}^2]^T \in \mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

对于正整数  $l$ , 定义矩阵

$$\delta_{xx} = [\bar{x}(t_1) - \bar{x}(t_0), \bar{x}(t_2) - \bar{x}(t_1), \dots, \bar{x}(t_l) - \bar{x}(t_{l-1})]^T \in \mathbf{R}^{l \times \frac{1}{2}n(n+1)}$$

$$I_{xx} = \left[ \int_{t_0}^{t_1} x \otimes x d\tau, \int_{t_1}^{t_2} x \otimes x d\tau, \dots, \int_{t_{l-1}}^{t_l} x \otimes x d\tau \right]^T \in \mathbf{R}^{l \times n^2}$$

$$I_{xu} = \left[ \int_{t_0}^{t_1} x \otimes u d\tau, \int_{t_1}^{t_2} x \otimes u d\tau, \dots, \int_{t_{l-1}}^{t_l} x \otimes u d\tau \right]^T \in \mathbf{R}^{l \times mn}$$

其中  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_l$ . 由式 (22) 和式 (23) 可知, 式 (21) 可等价表示为:

$$\Theta_{\sigma(t), k} \begin{bmatrix} \sum_i \delta(\sigma(t) - i) \bar{P}_{\sigma(t), k} \\ \sum_i \delta(\sigma(t) - i) \text{vec}(K_{\sigma(t), k+1}) \end{bmatrix} = \Xi_{\sigma(t), k} \quad (24)$$

其中

$$\Theta_{\sigma(t), k} = [\delta_{xx}, -2I_{xx}(I_n \otimes \sum_i \delta(\sigma(t) - i) K_{\sigma(t), k}^T \times R) - 2I_{xu}(I_n \otimes R)] \in \mathbf{R}^{l \times [\frac{1}{2}n(n+1) + mn]}$$

$$\Xi_{\sigma(t), k} = -I_{xx} \text{vec}(Q_{\sigma(t), k}) \in \mathbf{R}^l$$

当  $\Theta_{\sigma(t), k}$  为列满秩矩阵时,

$$\begin{bmatrix} \sum_i \delta(\sigma(t) - i) \bar{P}_{\sigma(t), k} \\ \sum_i \delta(\sigma(t) - i) \text{vec}(K_{\sigma(t), k+1}) \end{bmatrix} = (\Theta_{\sigma(t), k}^T \Theta_{\sigma(t), k})^{-1} \Theta_{\sigma(t), k}^T \Xi_{\sigma(t), k} \quad (25)$$

由此, 可以得到线性化模型  $\sigma(t)$  第  $k$  次迭代的自适应最优控制器增益  $K_{\sigma(t), k+1}$ .

令  $\hat{K}_{\sigma(t)}$  为迭代终止时的自适应最优控制器增益并作为  $K_{\sigma(t)}$  的估计,  $\Theta_{\sigma(t)}$  和  $\Xi_{\sigma(t)}$  为迭代终止时的数据向量, 可以得到  $\hat{K}_{\sigma(t)}$  的计算公式如式 (17) 所示. 令  $\hat{P}_{\sigma(t)}$  为迭代终止时的  $\bar{P}_{\sigma(t)}$  的估计, 由此可以得到黎卡提方程的近似解  $\hat{P}_{\sigma(t)}$ .

接下来, 针对线性化模型  $\sigma(t)$  求解矩阵  $P_{\sigma(t)} B_{\sigma(t)}$  和  $P_{\sigma(t)} A_{\sigma(t)}$  的估计, 从而得到  $M$  个平衡点附近的  $M$  个线性化模型. 当  $A_i$  和  $B_i$  已知时, 易知

$$\sum_i \delta(\sigma(t) - i) P_{\sigma(t)} B_{\sigma(t)} = \sum_i \delta(\sigma(t) - i) K_{\sigma(t)}^T R \quad (26)$$

因此,  $A_i$  和  $B_i$  未知时, 若记  $L_{\sigma(t)}$  为  $P_{\sigma(t)} B_{\sigma(t)}$  的估计, 则

$$L_{\sigma(t)} = \hat{K}_{\sigma(t)}^T R \quad (27)$$

$P_{\sigma(t)} A_{\sigma(t)}$  的估计可根据线性化模型  $\sigma(t)$  的贝尔曼方程得到, 易知

$$\sum_i \delta(\sigma(t) - i) x^T(t) P_{\sigma(t)} [A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} u(t)] + \frac{1}{2} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] = 0 \quad (28)$$

将式 (27) 代入上式, 利用离线采集的第  $\sigma(t)$  组输入、状态数据, 通过求取最小二乘解可以得到如式 (18) 所示的矩阵  $P_{\sigma(t)} A_{\sigma(t)}$  的估计  $N_{\sigma(t)}$ . 根据  $D_{\sigma(t)}$ ,  $N_{\sigma(t)}$  以及  $\hat{P}_{\sigma(t)}$ , 可以很容易得到  $M$  个平衡点附近的近似控制器设计模型:

$$\dot{x} = \sum_i \delta(\sigma(t) - i) [\hat{P}_{\sigma(t)}^{-1} N_{\sigma(t)} x + \hat{P}_{\sigma(t)}^{-1} L_{\sigma(t)} u] \quad (29)$$

最后求取最优切换序列和线性自适应最优切换控制律. 针对模型 (29), 应用嵌入变换法, 使  $\delta(\sigma(t) - i)$  在  $[0, 1]$  内连续变化, 为此令  $\delta(t) = [\delta(\sigma(t) - 1), \dots, \delta(\sigma(t) - M)]^T$  并记  $W = \{\delta \in \mathbf{R}^M : \sum_i \delta(\sigma(t) - i) = 1, \delta(\sigma(t) - i) \geq 0\}$ . 定义哈密顿函数:

$$H(x, \delta, u) = \frac{1}{2} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] + x^T(t) \sum_i \delta(\sigma(t) - i) \hat{P}_{\sigma(t)} \times \{\hat{P}_{\sigma(t)}^{-1} N_{\sigma(t)} x + \hat{P}_{\sigma(t)}^{-1} L_{\sigma(t)} u\} \quad (30)$$

易知, 针对嵌入式近似控制器设计模型的最优控制律为:

$$u_L(t) = - \sum_i \delta(\sigma(t) - i) \hat{K}_{\sigma(t)} x(t) \quad (31)$$

将式 (31) 代入式 (30), 化简可得

$$H(x, \delta) = \frac{1}{2} x^T Q x + \sum_i \delta(\sigma(t) - i) x^T N_{\sigma(t)} x - \frac{1}{2} \sum_i \delta(\sigma(t) - i) x^T \hat{K}_{\sigma(t)}^T R \times \hat{K}_{\sigma(t)} x \delta(\sigma(t) - i) \quad (32)$$

下面将  $\delta(\sigma(t) - i)$  作为决策变量, 通过最小化  $H(x, \delta)$ , 可以得到最优切换序列.

实际上, 选择  $\delta(\sigma(t) - i)$  使  $H(x, \delta)$  最小等价为使式 (33) 最小

$$\bar{H}(x, \delta) = \left( -\frac{1}{2} \sum_i \delta(\sigma(t) - i) x^T \hat{K}_{\sigma(t)}^T \times R \hat{K}_{\sigma(t)} x \delta(\sigma(t) - i) + \sum_i \delta(\sigma(t) - i) x^T N_{\sigma(t)} x \right) \quad (33)$$

这是一个二次规划问题, 由于  $W$  是凸集,  $\bar{H}$  是凹函数, 该问题的全局极小值一定在  $\delta(\sigma(t) - i) \in \{0, 1\}$  取得<sup>[21]</sup>, 且该全局极小值对应的  $\sigma(t)$  即为最优切换序列. 由此可以得到如式 (16) 的切换准则函数和式 (19) 的线性自适应最优切换控制律.  $\square$

**注 3.** 由式 (27) 可知  $L_{\sigma(t)}$  的估计精度由  $\hat{K}_{\sigma(t)}$

的估计精度决定. 由文献 [23] 易知,  $\hat{K}_{\sigma(t)}$  收敛于参数已知时的最优控制器增益  $K_{\sigma(t)}$ , 因此  $L_{\sigma(t)}$  收敛于  $P_{\sigma(t)}B_{\sigma(t)}$ . 由式 (28) 可知  $N_{\sigma(t)}$  的估计精度由最小二乘估计算法的精度和  $\hat{K}_{\sigma(t)}$  的估计精度共同决定.

**注 4.** 在每个平衡点附近, 如果存在正整数  $l_0$ , 使得对于任意  $l \geq l_0$ , 都有  $\text{rank}([I_{xx}, I_{xu}]) = \frac{n(n+1)}{2} + mn$ , 即矩阵  $\Theta_{\sigma(t), k}$  是满秩的, 那么序列  $\{P_{\sigma(t), k}\}_{k=0}^{\infty}$  和  $\{K_{\sigma(t), k}\}_{k=0}^{\infty}$  分别收敛到黎卡提方程的解  $P_{\sigma(t)}$  和最优控制器增益  $K_{\sigma(t)}$  [23].

未建模动态补偿器的设计与线性模型参数已知时的情况类似, 即

$$u_e = \frac{a_1 \hat{e}_m}{\|\hat{e}_m\| + a_2} \quad (34)$$

其中  $a_1 \in \mathbf{R}^{m \times n}$  为可调参数矩阵,  $a_2$  为可调参数,  $\hat{e}_m = x - \hat{x}^*$  为建模误差,  $\hat{x}^*$  为最优线性化模型  $\sigma(t)$  的状态.

综上,  $A_i$  和  $B_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) 未知时自适应最优切换控制律为:

$$u = -\hat{K}_{\sigma(t)}x(t) + \frac{a_1 \hat{e}_m}{\|\hat{e}_m\| + a_2} \quad (35)$$

自适应最优切换控制器设计流程如图 2 所示.

### 3 仿真实验

为了验证本文所提方法的有效性, 我们分别进行了模型参数已知时最优切换控制和模型参数未知时自适应最优切换控制的数值仿真实验, 并分别与单一的针对一个模型的最优控制器和自适应最优控制器进行了对比. 除此之外, 为了验证本文所提方法的实际可应用性, 我们进行了模型参数未知时双容水箱液位系统的自适应最优切换控制仿真实验.

#### 3.1 参数已知时最优切换控制数值仿真实验

考虑如下连续时间非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + (\cos(2x_1) + 2)u_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2x_1^2 + (\cos(2x_1) + 2)u_2 \end{cases} \quad (36)$$

其中  $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbf{R}^2$  是状态向量,  $u = [u_1, u_2]^T \in \mathbf{R}^2$  是输入向量.

我们的目标是针对已知的非线性系统 (36), 寻找最优切换序列和最优切换控制律, 使得闭环系统渐近稳定. 为此, 首先分别将  $u = [u_1, u_2]^T = [-3, 10]^T$ ,  $[-2, 10]^T$  和  $[-1, 10]^T$  施加到非线性系统 (36) 上, 并令  $\dot{x} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2]^T = [0, 0]^T$  得到非线性系统 (36) 的三个平衡点, 即  $[u_{r1}, u_{r2}, x_{r1}, x_{r2}]^T = [-3, 10, -4.4685, 0.5592]^T$ ,  $[-2, 10, -4.2642, 0.7565]^T$  和  $[-1, 10,$

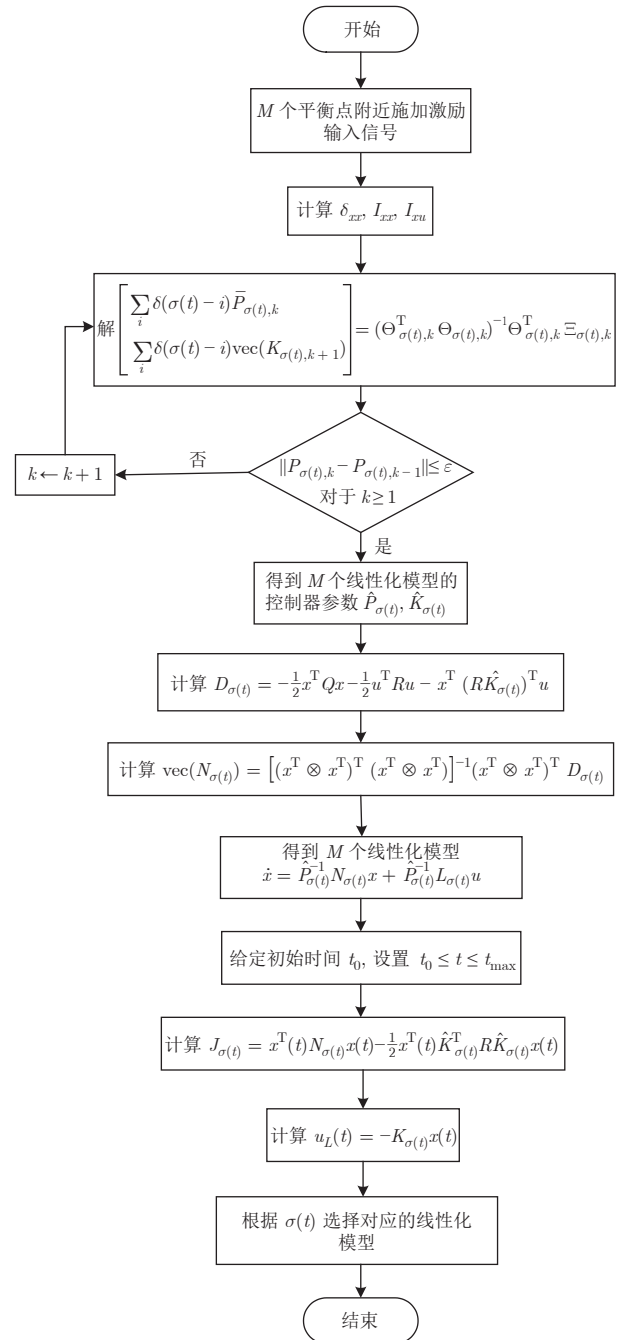


图 2 自适应最优切换控制器设计算法流程  
Fig. 2 Flow chart of adaptive optimal switching control algorithm

$-4.0264, 1.1119]^T$ . 将式 (36) 分别在上述三个平衡点处泰勒展开, 并令  $\delta(\sigma(t) - i) \in \{0, 1\}$  且  $\sum_{i=1}^3 \delta(\sigma(t) - i) = 1$ , 可以得到非线性系统 (36) 在 3 个平衡点附近的控制器设计模型:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^3 \delta(\sigma(t) - i) [A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} u(t)] \quad (37)$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3.8124 & -2 \\ 14.3725 & -19.9672 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.1167 & 0 \\ 0 & 1.1167 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -4.1244 & -2 \\ 22.0736 & -18.1833 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1.3756 & 0 \\ 0 & 1.3756 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -2.9606 & -2 \\ 28.5601 & -16.2116 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1.8026 & 0 \\ 0 & 1.8026 \end{bmatrix}$$

接下来给定随机初始状态  $x(0) = [x_1(0), x_2(0)]^T = [-4.4685, 0.5592]^T$ , 并选择控制器参数矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

和未建模动态补偿器参数

$$a_1 = \begin{bmatrix} -150 & 0 \\ 0 & -150 \end{bmatrix}, a_2 = 1.5 \quad (39)$$

最后将最优切换控制器 (6) ~ (11) 加入到系统 (36), 得到如图 3 所示的状态曲线, 如图 4 所示的控制输入曲线和如图 5 所示的最优切换序列. 结合图 3 和图 4, 在  $t = 50\text{ s}$  和  $t = 100\text{ s}$  时, 虽然系统的平衡点发生变化, 但是采用本文提出的最优切换控制方法仍能够将状态很快调节到平衡点附近并保持不变.

为了验证本文所提最优切换控制方法的优越性, 我们与单一的针对一个模型的最优控制方法进行了对比实验. 以针对平衡点  $[u_{r1}, u_{r2}, x_{r1}, x_{r2}]^T = [-1, 10, -4.0264, 1.1119]^T$  处的线性化模型为例, 给定初始状态  $x(0) = [x_1(0), x_2(0)]^T = [-4.4685, 0.5592]^T$ , 选择控制器参数矩阵如式 (38) 所示, 未建模动态补偿器参数如式 (39) 所示.

图 6 和图 7 分别为所得到的状态曲线和控制输入曲线. 根据图 6 和图 7 可以看出, 针对平衡点  $[u_{r1}, u_{r2}, x_{r1}, x_{r2}]^T = [-1, 10, -4.0264, 1.1119]^T$  处的线性化模型设计的控制器只能将状态调节到对应的平衡点附近. 当平衡点发生变化时, 系统的状态存在稳态误差. 但是由于平衡点的变化引起的建模误差可近似为常数, 因此状态曲线虽然偏离平衡点但恒定不变.

### 3.2 参数未知时自适应最优切换控制数值仿真实验

本节的目标是针对未知非线性系统 (36), 寻找

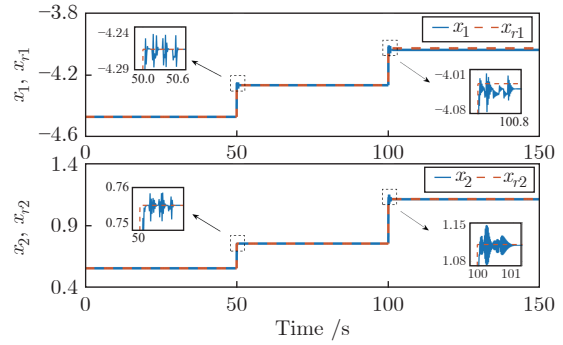


图 3 采用最优切换控制器时系统的状态  
Fig.3 State curves of the system when using the optimal switching controller

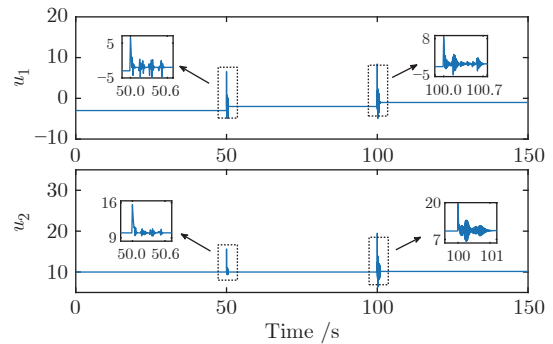


图 4 采用最优切换控制器时系统的控制输入  
Fig.4 Input curves of the system when using the optimal switching controller

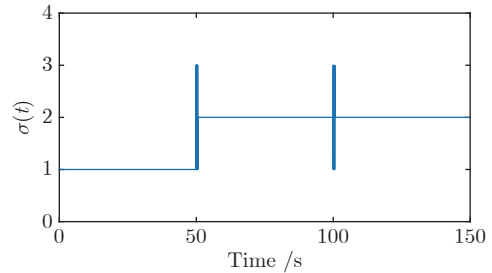


图 5 采用最优切换控制器时系统的最优切换序列  
Fig.5 Optimal switching sequence of the system when using the optimal switching controller

最优切换序列和自适应最优切换控制律, 使得闭环系统渐近稳定. 不失一般性, 这里我们以两个平衡点为例进行仿真实验. 结合图 2, 首先分别在平衡点  $[u_{r1}, u_{r2}, x_{r1}, x_{r2}]^T = [-2, 10, -4.2642, 0.7565]^T$  和  $[u_{r1}, u_{r2}, x_{r1}, x_{r2}]^T = [2, 10, -2.5517, 3.6570]^T$  附近施加激励输入信号, 即  $[u_1, u_2]^T = [\sin(0.1t), \sin(0.5t)]^T$ , 从  $t = 0\text{ s}$  到  $t = 2\text{ s}$ , 以  $0.01\text{ s}$  为采样周期, 分别采集 201 组输入和状态数据, 计算  $\delta_{xx}, I_{xx}, I_{xu}$ . 选择



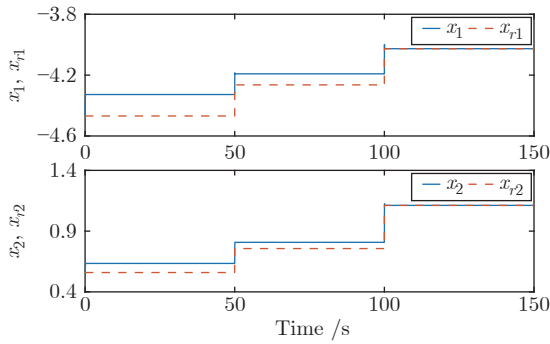


图 6 采用最优控制器时系统的状态

Fig.6 State curves of the system when using the optimal controller

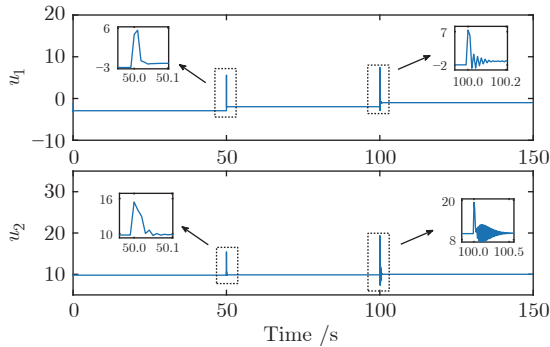


图 7 采用最优控制器时系统的控制输入

Fig.7 Input curves of the system when using the optimal controller

控制器参数矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 640 & 0 \\ 0 & 1300 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

终止循环的条件为  $\|P_{\sigma(t),k} - P_{\sigma(t),k-1}\| \leq 10^{-3}$ , 其中  $\sigma(t) = 1, 2$ ;  $k$  代表迭代次数. 根据式 (17) 分别得到针对两个模型的  $\hat{P}_{\sigma(t)}$  和  $\hat{K}_{\sigma(t)}$ , 即:

$$\begin{cases} \hat{P}_1 = \begin{bmatrix} 18.6529 & 7.2042 \\ 7.2042 & 25.5722 \end{bmatrix} \\ \hat{K}_1 = \begin{bmatrix} 23.3398 & -13.3013 \\ 7.7872 & 23.0313 \end{bmatrix} \\ \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} 61.0059 & 41.1278 \\ 41.1278 & 43.2923 \end{bmatrix} \\ \hat{K}_2 = \begin{bmatrix} 13.6682 & 16.8537 \\ -13.8988 & 27.0332 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (41)$$

然后利用所采集的输入和状态数据求解式 (18), 分别得到针对两个模型的  $N_{\sigma(t)}$ , 即:

$$\begin{cases} N_1 = \begin{bmatrix} -66.1478 & 62.8418 \\ 62.8418 & -330.5263 \end{bmatrix} \\ N_2 = \begin{bmatrix} -23.5253 & 108.6936 \\ 108.6936 & -278.6044 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (42)$$

最后, 根据式 (29) 可以得到两个线性化模型如下式所示:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -23.3988 & 9.5227 \\ 18.9538 & 19.2376 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1.6294 & 0.078 \\ -0.979 & 0.8784 \end{bmatrix} u \\ \dot{x} = \begin{bmatrix} -8.6163 & 33.3435 \\ 12.6493 & -44.7606 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0.1068 & -1.8045 \\ 0.4908 & 2.3387 \end{bmatrix} u \end{cases} \quad (43)$$

将两个线性化模型嵌入到一个连续时间大系统中, 结合图 2, 给定初始状态  $x(0) = [x_1(0), x_2(0)]^T = [-4, 0]^T$  和初始时间  $t_0 = 0$  s, 设置  $t_{\max} = 100$  s, 选择未建模动态补偿器参数

$$a_1 = \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -100 \end{bmatrix}, a_2 = 1.5 \quad (44)$$

将自适应最优切换控制器 (35) 加入到非线性系统, 当满足  $t \geq t_{\max}$  时, 可以得到如图 8 所示的状态曲线, 如图 9 所示的控制输入曲线和如图 10 所示的切换序列. 在  $t = 50$  s, 由于平衡点突变, 切换序列发生改变, 导致系统的状态震荡, 经过 1.8 s 的调节时间, 系统的状态被调节到平衡点附近并保持不变.

为了验证本文所提自适应最优切换控制方法的优越性, 我们以平衡点  $[u_{r1}, u_{r2}, x_{r1}, x_{r2}]^T = [-2, 10, -4.2642, 0.7565]^T$  为例, 与单一的针对一个模型的自适应最优控制方法进行了对比实验. 选择控制器参数矩阵如式 (40), 根据式 (17) 和式 (18) 可以得到  $\hat{P}_1$ ,  $\hat{K}_1$  和  $N_1$  分别如式 (41) 和式 (42) 所示, 根据式 (29) 可以得到线性化模型如式 (43) 所示, 选择未建模动态补偿器参数如式 (44) 所示. 所得到的状态曲线和控制输入曲线如图 11 和图 12 所示. 从图 11 和图 12 可以看出, 针对平衡点  $[u_{r1}, u_{r2}, x_{r1}, x_{r2}]^T = [-2, 10, -4.2642, 0.7565]^T$  设计的自适应最优控制器只能将状态调节到对应的平衡点附近. 与模型参数已知时情况相同, 当  $t = 50$  s 时, 平衡点发生变化, 系统状态存在稳态误差. 但是由于平衡点的变化引起的建模误差可近似为常数, 因此状态曲

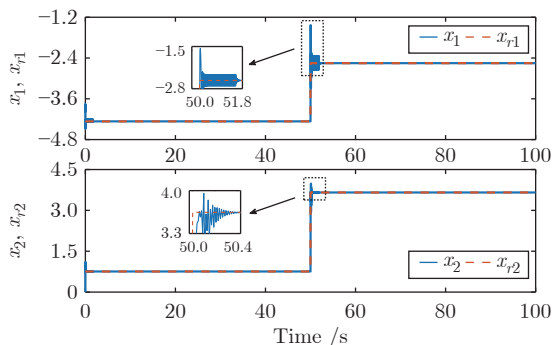


图 8 采用自适应最优切换控制器时系统的状态  
Fig.8 The state curves of the system when using the adaptive optimal switching controller

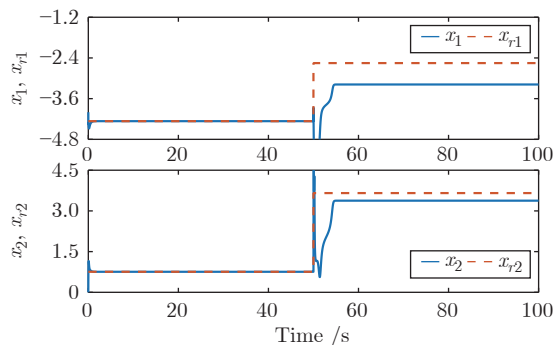


图 11 采用自适应最优控制器时系统的状态  
Fig.11 State curves of the system when using the adaptive optimal controller

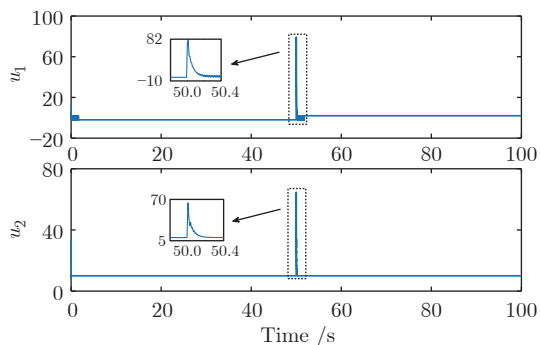


图 9 采用自适应最优切换控制器时系统的控制输入  
Fig.9 The input curves of the system when using the adaptive optimal switching controller

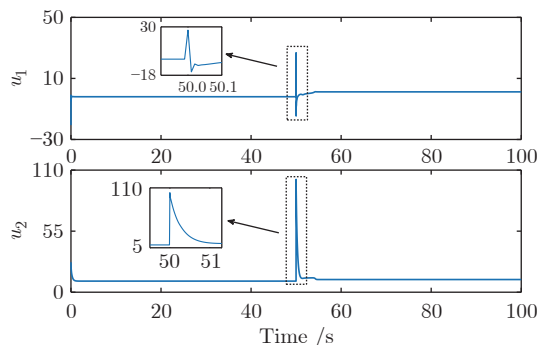


图 12 采用自适应最优控制器时系统的控制输入  
Fig.12 Input curves of the system when using the adaptive optimal controller

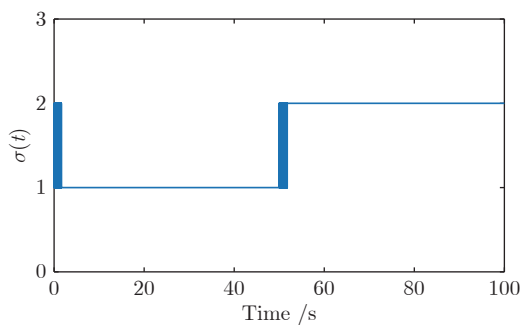


图 10 采用自适应最优切换控制器时系统的切换序列  
Fig.10 The switching sequence of the system when using the adaptive optimal switching controller

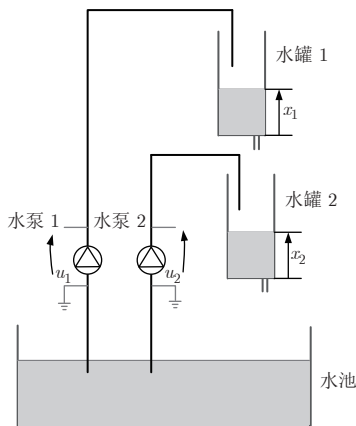


图 13 双容水箱结构  
Fig.13 Structure of the coupled-tank

线虽然偏离平衡点但恒定不变.

### 3.3 参数未知时双容水箱液位系统的自适应最优切换控制仿真实验

为了进一步验证所提方法的实际可应用性, 接下来针对如图 13 所示的双容水箱液位系统进行仿真实验<sup>[24]</sup>. 它主要由水池、水泵 1、水泵 2、水罐 1 和水罐 2 及两个液位传感器组成. 水泵 1 和水泵 2 分

别将水池中的水经过橡胶管抽取到水罐 1 和水罐 2 中, 两个水罐底部存在漏水孔, 水罐 1 中的水经过漏水孔流入水罐 2, 水罐 2 中的水经过漏水孔流入水池, 形成闭环.

根据物料平衡原理, 建立双容水箱液位系统的机理模型:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{K_{p1}u_1 - A_{o1}\sqrt{2gx_1}}{A_{t1}} \\ \dot{x}_2 = \frac{A_{o1}\sqrt{2gx_1} + K_{p2}u_2 - A_{o2}\sqrt{2gx_2}}{A_{t2}} \end{cases} \quad (45)$$

其中  $x_1$  和  $x_2$  分别表示水罐 1 和水罐 2 的液位,  $u_1$  和  $u_2$  分别表示水泵 1 和水泵 2 的电压,  $K_{p1}$ 、 $K_{p2}$ 、 $A_{o1}$ 、 $A_{o2}$ 、 $A_{t1}$ 、 $A_{t2}$  和  $g$  的含义及取值如表 1 所示.

表 1 模型中涉及的符号含义及取值  
Table 1 The symbol meaning and value involved in the model

符号	含义	取值
$K_{p1}$	水泵 1 增益	3.3
$K_{p2}$	水泵 2 增益	3.3
$A_{o1}$	漏水孔 1 的横截面积	0.1781 cm <sup>2</sup>
$A_{o2}$	漏水孔 2 的横截面积	0.1781 cm <sup>2</sup>
$A_{t1}$	水罐 1 的横截面积	15.5179 cm <sup>2</sup>
$A_{t2}$	水罐 2 的横截面积	15.5179 cm <sup>2</sup>
$g$	重力加速度	981 cm/s <sup>2</sup>

我们的目标是针对双容水箱液位系统 (45), 寻找最优切换序列和自适应最优切换控制律, 使系统的液位渐近稳定. 为此, 首先分别将  $u = [u_1, u_2]^T = [6.5, 4]^T$  和  $[8, 4]^T$  施加到双容水箱液位系统 (45) 上, 并令  $\dot{x} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2]^T = [0, 0]^T$  得到双容水箱液位系统 (45) 的两个平衡点, 即  $[6.5, 4, 14.17, 25.2]^T$  和  $[8, 4, 11.2, 21.17]^T$ . 结合图 2, 分别在两个平衡点附近施加激励输入信号, 即  $[u_1, u_2]^T = [\sin(0.1t), \sin(0.5t)]^T$ , 从  $t = 0$  s 到  $t = 2$  s, 以 0.01 s 为采样周期, 分别采集 201 组输入和状态数据, 计算  $\delta_{xx}$ ,  $I_{xx}$ ,  $I_{xu}$ . 选择控制器参数矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

终止循环的条件为  $\|P_{\sigma(t), k} - P_{\sigma(t), k-1}\| \leq 10^{-3}$ , 其中  $\sigma(t) = 1, 2$ ;  $k$  代表迭代次数. 根据式 (17) 分别得到针对两个模型的  $\hat{P}_{\sigma(t)}$  和  $\hat{K}_{\sigma(t)}$ , 即:

$$\begin{cases} \hat{P}_1 = \begin{bmatrix} -288.8054 & 74.6466 \\ 74.6466 & 34.7536 \end{bmatrix} \\ \hat{K}_1 = \begin{bmatrix} 10.9831 & -11.2885 \\ 11.6796 & 8.8839 \end{bmatrix} \\ \hat{P}_2 = \begin{bmatrix} -211.7805 & 64.137 \\ 64.137 & 39.1294 \end{bmatrix} \\ \hat{K}_2 = \begin{bmatrix} 10.7373 & -10.6546 \\ 10.7262 & 9.5193 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (47)$$

然后利用所采集的输入和状态数据求解式 (18),

分别得到针对两个模型的  $N_{\sigma(t)}$ , 即:

$$\begin{cases} N_1 = \begin{bmatrix} 1.0611 \times 10^5 & -4.0546 \times 10^4 \\ -4.0546 \times 10^4 & 1.5371 \times 10^4 \end{bmatrix} \\ N_2 = \begin{bmatrix} 7.8901 \times 10^4 & -3.499 \times 10^4 \\ -3.499 \times 10^4 & 1.5392 \times 10^4 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (48)$$

最后, 根据式 (29) 可以得到两个近似线性化模型如下式所示:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -430.16 & 163.78 \\ -242.73 & 90.5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0.0784 & 0.0165 \\ -0.1563 & 0.2202 \end{bmatrix} u \\ \dot{x} = \begin{bmatrix} -429.95 & 190.02 \\ -189.49 & 81.89 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -0.089 & 0.0154 \\ -0.1264 & 0.2181 \end{bmatrix} u \end{cases} \quad (49)$$

将两个近似线性化模型嵌入到一个连续时间大系统中, 结合图 2, 给定初始状态  $x(0) = [x_1(0), x_2(0)]^T = [0, 0]^T$  和初始时间  $t_0 = 0$  s, 设置  $t_{\max} = 160$  s 和输入电压限幅为  $0 \sim 22$  V, 选择未建模动态补偿器参数

$$a_1 = \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -100 \end{bmatrix}, a_2 = 1.5 \quad (50)$$

当  $t = 80$  s 时, 将自适应最优切换控制器 (35) 加入到双容水箱液位系统, 当满足  $t \geq t_{\max}$  时, 可以得到如图 14 所示的液位曲线, 如图 15 所示的控制输入曲线和如图 16 所示的切换序列. 在  $t = 120$  s, 平衡点突变, 经过 2.1 s 的调节时间, 系统的液位被调节到平衡点附近并保持不变.

为了验证本文所提自适应最优切换控制方法的优越性, 我们以平衡点  $[6.5, 4, 14.17, 25.2]^T$  为例, 与单一的针对一个模型的自适应最优控制方法进行了对比实验. 选择控制器参数矩阵如式 (46) 所示. 根据式 (17) 和式 (18) 可以得到  $\hat{P}_1$ ,  $\hat{K}_1$  和  $N_1$  分别如式 (47) 和式 (48) 所示. 根据式 (29) 可以得到线性化模型如式 (49) 所示. 选择未建模动态补偿器参数如式 (50) 所示. 可以得到如图 17 所示的液位曲线和如图 18 所示的控制输入曲线. 根据图 17 和图 18 可以看出, 针对平衡点  $[6.5, 4, 14.17, 25.2]^T$  设计的自适应最优控制器只能将液位调节到对应的平衡点附近. 当  $t = 120$  s 时, 平衡点发生变化, 系统液位存在稳态误差.

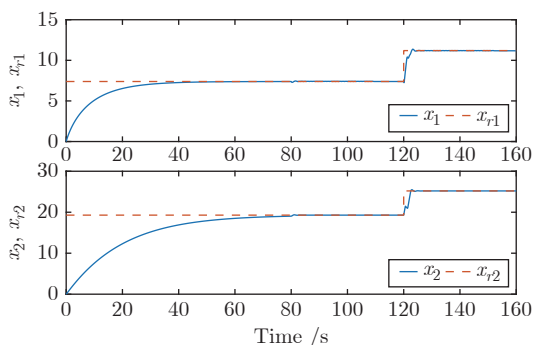


图 14 采用自适应最优切换控制器时水箱的液位

Fig.14 Levels of the coupled-tank when using the adaptive optimal switching controller

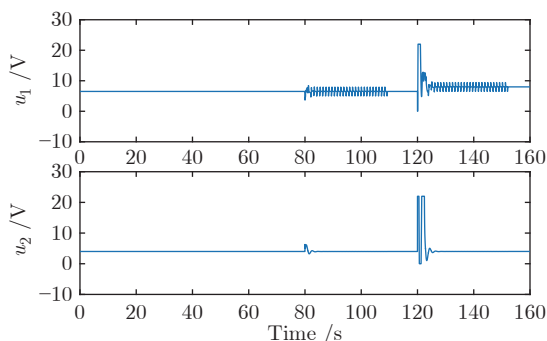


图 15 采用自适应最优切换控制器时水箱的控制输入

Fig.15 Input curves of the coupled-tank when using the adaptive optimal switching controller

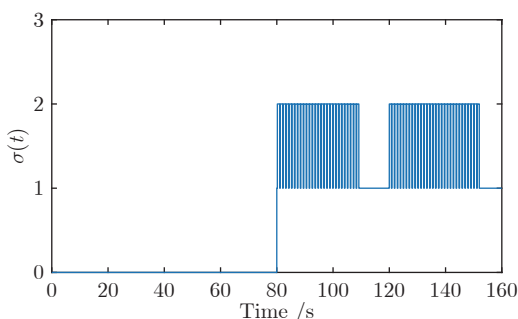


图 16 采用自适应最优切换控制器时水箱的切换序列

Fig.16 Switching sequence of the coupled-tank when using the adaptive optimal switching controller

## 4 结论

针对具有未知动态和  $M$  个平衡点的连续时间非线性系统, 本文提出了一种自适应最优切换控制方法. 该方法首先在非线性的  $M$  个平衡点附近采集状态信息和输入信息, 利用最小二乘法和黎卡提方程迭代求解公式得到最优控制器增益的估计, 利用极小值原理得到  $M$  个平衡点附近的线性化模型. 然后将嵌入转换法和近似动态规划方法相结合,

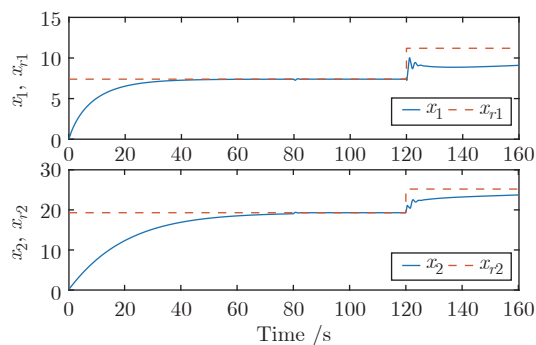


图 17 采用自适应最优控制器时水箱的液位

Fig.17 Levels of the coupled-tank when using the adaptive optimal controller

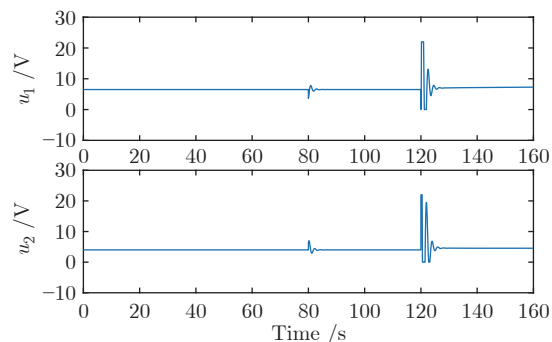


图 18 采用自适应最优控制器时水箱的控制输入

Fig.18 Input curves of the coupled-tank when using the adaptive optimal controller

得到了非线性系统的最优切换序列和线性自适应最优切换控制器. 最后, 将线性自适应最优切换控制器和未建模动态补偿器相结合, 实现了对非线性系统的最优控制. 仿真实验表明和单一的最优控制方法相比, 本文所提方法能够实现较好的控制效果且具有实际可应用性.

## 附录A 参数已知时的线性最优切换控制律和最优切换序列推导过程

令  $\delta(t) = [\delta(\sigma(t) - 1), \dots, \delta(\sigma(t) - M)]^T$ , 并记  $W = \{\delta \in \mathbf{R}^M : \sum_i \delta(\sigma(t) - i) = 1, \delta(\sigma(t) - i) \geq 0\}$ . 针对控制器设计模型 (4) 的嵌入式模型:

$$\dot{x}(t) = \sum_i \delta(\sigma(t) - i) [A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} u(t)] \quad (A1)$$

其中  $\delta(\sigma(t) - i) \in [0, 1]$ , 定义哈密顿函数:

$$H(x, \delta, \lambda) = \frac{1}{2} x^T(t) Q x(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) + \lambda^T(t) \sum_i \delta(\sigma(t) - i) [A_{\sigma(t)} x(t) + B_{\sigma(t)} u(t)] \quad (A2)$$

则协态方程为

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx(t) - \sum_i \delta(\sigma(t) - i)A_{\sigma(t)}^T \lambda(t) \quad (\text{A3})$$

令  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ , 可以得到

$$u(t) = -R^{-1} \sum_i \delta(\sigma(t) - i)B_{\sigma(t)}^T \lambda(t) \quad (\text{A4})$$

把式 (A4) 代入式 (A2) 可以得到

$$\begin{aligned} H(x, \delta, \lambda) = & \lambda^T(t) \sum_i \delta(\sigma(t) - i)A_{\sigma(t)}x(t) - \frac{1}{2} \times \\ & \sum_i \delta(\sigma(t) - i)\lambda^T(t)B_{\sigma(t)}R^{-1} \times \\ & B_{\sigma(t)}^T \lambda(t)\delta(\sigma(t) - i) + \frac{1}{2}x^T(t)Qx(t) \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

接下来, 我们将问题转化为如何选择  $\delta(\sigma(t) - i)$  使  $H$  最小. 易知, 选择  $\delta(\sigma(t) - i)$  使  $H$  最小可简化为使下式最小:

$$\begin{aligned} H_0(x, \delta, \lambda) = & -\frac{1}{2} \sum_i \delta(\sigma(t) - i)\lambda^T(t)B_{\sigma(t)}R^{-1} \times \\ & B_{\sigma(t)}^T \lambda(t)\delta(\sigma(t) - i) + \lambda^T(t) \times \\ & \sum_i \delta(\sigma(t) - i)A_{\sigma(t)}x(t) \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

它可看作是一个二次规划问题:

$$\begin{aligned} \min & -\frac{1}{2} \sum_i \delta(\sigma(t) - i)G(t)\delta(\sigma(t) - i) + \\ & \sum_i \delta(\sigma(t) - i)\lambda^T(t)A_{\sigma(t)}x(t) \\ \text{s.t.} & \delta(\sigma(t) - i) \in W \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

其中  $G(t) = \lambda^T(t)B_{\sigma(t)}R^{-1}B_{\sigma(t)}^T \lambda(t)$ ,  $W = \{\delta \in \mathbf{R}^M : \sum_i \delta(\sigma(t) - i) = 1, \delta(\sigma(t) - i) \geq 0\}$  为凸集. 当  $R$  为正定矩阵时,  $-G(t) \leq 0$ , 因此问题式 (A7) 可看作凹函数在凸集  $W$  上的最小化问题,  $H_0$  的全局最小值一定在  $\delta(\sigma(t) - i) \in \{0, 1\}$  取得<sup>[21]</sup>. 根据式 (A6), 选择切换准则函数:

$$\begin{aligned} J_{\sigma(t)} = & \lambda^T(t) \sum_i \delta(\sigma(t) - i)A_{\sigma(t)}x(t) - \frac{1}{2} \times \\ & \sum_i \delta(\sigma(t) - i)\lambda^T(t)B_{\sigma(t)}R^{-1}B_{\sigma(t)}^T \times \\ & \lambda(t)\delta(\sigma(t) - i) \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

令

$$\lambda(t) = \sum_i \delta(\sigma(t) - i)P_{\sigma(t)}x(t) \quad (\text{A9})$$

其中  $P_{\sigma(t)}$  为对称实矩阵. 对式 (A9) 两边分别求导并整理得

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) = & \sum_i \delta(\sigma(t) - i)[P_{\sigma(t)}A_{\sigma(t)} - \\ & P_{\sigma(t)}B_{\sigma(t)}R^{-1}B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)}]x(t) \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

将式 (A3) 和式 (A10) 对比, 可以得到

$$\begin{aligned} \sum_i \delta(\sigma(t) - i)[P_{\sigma(t)}A_{\sigma(t)} + A_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)} - \\ P_{\sigma(t)}B_{\sigma(t)}R^{-1}B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)}] + Q = 0 \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

式 (A9) 分别代入式 (A8) 和式 (A4) 可以得到:

$$\begin{aligned} J_{\sigma(t)} = & x^T(t) \sum_i \delta(\sigma(t) - i)P_{\sigma(t)}A_{\sigma(t)}x(t) - \frac{1}{2} \times \\ & \sum_i \delta(\sigma(t) - i)x^T(t)P_{\sigma(t)}B_{\sigma(t)}R^{-1} \times \\ & B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)}x(t)\delta(\sigma(t) - i) \end{aligned} \quad (\text{A12})$$

$$u(t) = -R^{-1} \sum_i \delta(\sigma(t) - i)B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)}x(t) \quad (\text{A13})$$

由于  $\delta(\sigma(t) - i) \in \{0, 1\}$ , 结合式 (A12) 和式 (A11), 可以得到切换准则函数:

$$\begin{aligned} J_{\sigma(t)} = & x^T(t)P_{\sigma(t)}A_{\sigma(t)}x(t) - \frac{1}{2}x^T(t) \times \\ & P_{\sigma(t)}B_{\sigma(t)}R^{-1}B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)}x(t) \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

其中  $P_{\sigma(t)}$  根据黎卡提方程求解:

$$\begin{aligned} P_{\sigma(t)}A_{\sigma(t)} + A_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)} - \\ P_{\sigma(t)}B_{\sigma(t)}R^{-1}B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)} + Q = 0 \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

每一时刻, 计算并比较  $J_{\sigma(t)}$ , 求出最小的  $J_{\sigma(t)}$  对应的线性最优切换控制律:

$$u(t) = -K_{\sigma(t)}x(t) \quad (\text{A16})$$

其中  $\sigma(t)$  表示最优切换序列,  $K_{\sigma(t)}$  表示线性最优切换控制器的增益, 通过下式求解:

$$K_{\sigma(t)} = R^{-1}B_{\sigma(t)}^T P_{\sigma(t)} \quad (\text{A17})$$

## References

- 1 Lei J, Khalil H K. Feedback linearization for nonlinear systems with time-varying input and output delays by using high-gain predictors. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, **61**(8): 2262-2268
- 2 Wu Y Q, Isidori A, Lu R Q, Khalil H K. Performance recovery of dynamic feedback-linearization methods for multivariable nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, **65**(4): 1365-1380
- 3 Wang N, Tao F, Fu Z, Song S. Adaptive fuzzy control for a class of stochastic strict feedback high-order nonlinear systems with full-state constraints. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, **52**(1): 205-213

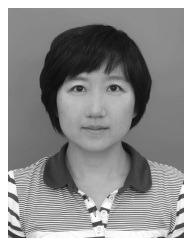
- 4 Fu Z, Wang N, Song S, Wang T. Adaptive fuzzy finite-time tracking control of stochastic high-order nonlinear systems with a class of prescribed performance. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2022, **30**(1): 88–96
- 5 Banks S P, Cimen T. Nonlinear optimal tracking control with application to super-tankers for autopilot design. *Automatica*, 2004, **40**(11): 1845–1863
- 6 Fu Y, Chai T Y. Neural-network-based nonlinear adaptive dynamical decoupling control. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2007, **18**(3): 921–925
- 7 Fu Y, Chai T Y. Self-tuning control with a filter and a neural compensator for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2013, **24**(5): 837–843
- 8 Chai T Y, Zhang Y J, Wang H, Su C Y, Sun J. Data-based virtual unmodeled dynamics driven multivariable nonlinear adaptive switching control. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2011, **22**(12): 2154–2172
- 9 Jia Y, Chai T Y. A data-driven dual-rate control method for a heat exchanging process. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2017, **64**(5): 4158–4168
- 10 Tan C, Tao G, Qi R Y, Yang H. A direct MRAC based multivariable multiple-model switching control scheme. *Automatica*, 2017, **84**: 190–198
- 11 Narendra K S, Cheng X. Adaptive control of discrete-time systems using multiple models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, **45**(9): 1669–1686
- 12 Fu Y, Chai T Y. Nonlinear multivariable adaptive control using multiple models and neural networks. *Automatica*, 2007, **43**(6): 1101–1110
- 13 Kuipers M, Ioannou P. Multiple model adaptive control with mixing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(8): 1822–1836
- 14 Han Z, Narendra K S. New concepts in adaptive control using multiple models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(1): 78–89
- 15 Huang M, Wang X, Wang Z L. Multiple model adaptive control for a class of linear-bounded nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(1): 271–276
- 16 Chaudhuri B, Majumder R, Pal B C. Application of multiple-model adaptive control strategy for robust damping of interarea oscillations in power system. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2004, **12**(5): 727–736
- 17 Karimi A, Landau I D. Robust adaptive control of a flexible transmission system using multiple models. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2000, **8**(2): 321–331
- 18 Chai T Y, Zhai L F, Yue H. Multiple models and neural networks based decoupling control of ball mill coal-pulverizing systems. *Journal of Process Control*, 2011, **21**(3): 351–366
- 19 Ghaffarzadeh H, Mehrizi-Sani A. Mitigation of subsynchronous resonance induced by a type III wind system. *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, 2020, **11**(3): 1717–1727
- 20 Leon A E, Amodeo S J, Mauricio J M. Enhanced compensation filter to mitigate subsynchronous oscillations in series-compensated DFIG-based wind farms. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2021, **36**(6): 3805–3814
- 21 Wu G Y, Sun J, Chen J. Optimal linear quadratic regulator of switched systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, **64**(7): 2898–2904
- 22 Kleinman D. On an iterative technique for Riccati equation computations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1968, **13**(1): 114–115
- 23 Jiang Z P, Jiang Y. Computational adaptive optimal control for continuous-time linear systems with completely unknown dynamics. *Automatica*, 2012, **48**(10): 2699–2704
- 24 Fu Y, Chen W, Fu J. A new optimal tracking controller of linear strongly coupled systems and its applications. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2022, **69**(3): 1387–1391



毛艳岭 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室硕士研究生。2020年获得曲阜师范大学学士学位。主要研究方向为自适应控制和最优控制。  
E-mail: 17863338853@163.com

(MAO Yan-Ling Master student at the State Key Laboratory of Syn-

thetical Automation for Process Industries, Northeastern University. She received her bachelor degree from Qufu Normal University in 2020. Her research interest covers adaptive control and optimal control.)



富月 东北大学流程工业综合自动化国家重点实验室教授。2009年获得东北大学控制理论与控制工程专业博士学位。主要研究方向为复杂工业过程自适应控制, 智能解耦控制, 近似动态规划和工业过程运行控制。本文通信作者。

E-mail: fuyue@mail.neu.edu.cn

(FU Yue Professor at the State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University. She received her Ph.D. degree in control theory and control engineer from Northeastern University in 2009. Her research interest covers adaptive control of complex industrial processes, intelligent decoupling control, approximate dynamic programming, and industrial operational control. Corresponding author of this paper.)