

# 具有遗忘个体的社会网络多维观点动力学分析与应用

刘青松<sup>1</sup> 李明鹏<sup>1</sup> 柴利<sup>2,3</sup>

**摘要** 在个体观点演化过程中,由于通讯技术和实际环境的限制,个体之间往往不能进行充分的交流.另一方面,由于社会群体的从众压力影响,个体会改变已形成的观点.为此,研究了具有遗忘个体和从众压力的拟强连通社会网络中表达/私人观点演化问题.为刻画不同话题之间表达/私人观点的相互影响,提出一个新的多维观点动力学模型.根据逻辑矩阵和网络影响子矩阵的正则性,给出表达观点和私人观点收敛的充分条件.应用本文所提出的观点动力学模型,复现了“多元无知”的社会现象.仿真分析表明,从众压力的恢复力越小,表达观点与私人观点的差异越大.

**关键词** 多维观点动力学,遗忘个体,逻辑矩阵,表达观点,私人观点

**引用格式** 刘青松,李明鹏,柴利.具有遗忘个体的社会网络多维观点动力学分析与应用.自动化学报,2023,49(10):2201-2210

**DOI** 10.16383/j.aas.c210091

## Analysis and Application of Multidimensional Opinion Dynamics on Social Networks With Oblivion Individuals

LIU Qing-Song<sup>1</sup> LI Ming-Peng<sup>1</sup> CHAI Li<sup>2,3</sup>

**Abstract** Due to the restriction of communication technology and real environment, individuals often do not communicate enough with each other in the evolution process of opinions. On the other hand, individuals may alter their formed opinions under the pressures of conforming in a social community. In this paper, we analyse the evolution problem of the expressed and private opinions for the quasi-strongly connected social networks with oblivion individuals and the pressures to conform. To describe the interaction influences of expressed/private opinions on different topics, a new multidimensional opinion dynamics model is proposed. Sufficient conditions guaranteeing the convergence of the expressed and private opinions are obtained in terms of the regularity of the logic matrix and influence submatrix. By applying our proposed opinion dynamics model to reproduce the social phenomenons of pluralistic ignorance. Simulation analyses show that the smaller the resilience of the pressures is, the larger the difference is between expressed and private opinions.

**Key words** Multidimensional opinion dynamics, oblivion individuals, logic matrices, expressed opinions, private opinions

**Citation** Liu Qing-Song, Li Ming-Peng, Chai Li. Analysis and application of multidimensional opinion dynamics on social networks with oblivion individuals. *Acta Automatica Sinica*, 2023, 49(10): 2201-2210

近年来,社会网络分析成为网络科学研究的热点之一,吸引了来自控制科学、社会心理学和经济学等多个领域研究者的广泛关注<sup>[1-3]</sup>.随着对多智能

体系统<sup>[4-6]</sup>和复杂网络<sup>[7-10]</sup>研究的深入,观点动力学中观点的形成和演化引起了学者们极大的关注,产生了许多重要的结果,促进了观点动力学相关方向的发展<sup>[11-12]</sup>.观点动力学的研究,不仅仅关注观点的一致现象<sup>[1]</sup>,而且还关注观点的极化现象<sup>[13]</sup>和观点的分簇现象<sup>[14]</sup>.例如,采用仿真分析方法,Zhang等<sup>[15]</sup>研究了连续时间有界置信模型的观点演化问题;通过引入个人决策树和社会网络,Friedkin等<sup>[12]</sup>分析了耦合矩阵对信念系统动力学的影响;Parsegov等<sup>[16]</sup>在静态社会网络中,提出了一个新的观点动力学模型,并分析了观点的稳定性和收敛性.此外,Li等<sup>[17]</sup>提出了一种新的快速、准确检测集群结构的动态方法,并且研究了电子商务系统中的动态聚类问题.

一直以来,学者们希望提出的观点动力学模型

收稿日期 2021-01-29 录用日期 2021-04-29

Manuscript received January 29, 2021; accepted April 29, 2021  
国家自然科学基金(61903282, 61625305),中国博士后科学基金(2020T130488)资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61903282, 61625305) and China Postdoctoral Science Foundation (2020T130488)

本文责任编辑 杨涛

Recommended by Associate Editor YANG Tao

1. 武汉科技大学信息科学与工程学院 武汉 430081 2. 浙江大学工业控制技术国家重点实验室 杭州 310027 3. 浙江大学控制科学与工程系 杭州 310027

1. School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081 2. State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Zhejiang University, Hangzhou 310027 3. College of Control Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027

既简单又便于严格的数学分析,与此同时,又可以捕捉到丰富的社会性质.故研究者从建立优异的数学模型模拟现实世界中个体的观点演变这一根本问题出发,提出了许多经典的观点动力学模型.例如,1974年 DeGroot<sup>[1]</sup>提出了基于智能体的观点演化模型(DeGroot 模型).在 DeGroot 模型中,个体通过吸收上一时刻邻居的观点形成当前时刻的观点,使得社会群体观点达成一致.然而,DeGroot 模型无法解释在良好的通讯条件下,个体观点极化的现象.为此,Friedkin 等<sup>[2]</sup>通过引入持续的外部输入(外部环境因素),提出了 Friedkin-Johnsen 模型.考虑个体间相互信任的情况,Hegselmann 和 Krause 提出一个新的具有有界置信区间的观点动力学模型(Hegselmann-Krause (H-K) 模型)<sup>[14]</sup>,仿真结果表明在不同的置信区间内,观点产生一致、极化和分簇的现象<sup>[14]</sup>.后来,学者们对 DeGroot 模型和 H-K 模型等进行改进并做了较为深入的研究<sup>[18-19]</sup>.

从社会心理学的角度完善观点动力学模型,以增强模型的泛化能力和应用范围,是一个值得研究的问题.1951年 Asch<sup>[20]</sup>做了一个关于因从众压力而产生观点扭曲的著名实验.基于 Asch 的实验,许多学者建立了相关的观点动力学模型,并给出了严格的数学分析.例如,Javarone<sup>[21]</sup>在全连通的网络条件下,分析了从众压力对观点演化的影响,Cheng 等<sup>[22]</sup>考虑了同时具有有界置信和个体压力的观点动力学模型.最近,Shang<sup>[23]</sup>研究了表达观点和私人观点的一致性问题;Ye 等<sup>[24]</sup>在社交网络是强连通的条件下,提出了具有表达观点和私人观点的社会网络模型,并分析了其收敛性.基于合作与竞争的社交网络,Lin 等<sup>[25]</sup>分析了观点的传播现象.Su 等<sup>[26]</sup>研究了噪声导致 H-K 观点动力学模型拟一致性问题.

受 Ye 等<sup>[24]</sup>研究强连通社交网络中观点演化问题的启发,本文研究具有遗忘个体的拟强连通社交网络中观点演化问题,并分析了观点动力学的收敛性和表达观点与私人观点之间的差异.本文主要贡献如下:

1) 提出了新的具有遗忘个体的多维观点动力学模型,刻画出了不同话题之间表达/私人观点的相互影响(详见第3节);

2) 不同于 Ye 等<sup>[24]</sup>所研究的社交网络是强连通的和非周期的,且不含有遗忘个体,本文研究的社交网络是拟强连通的且含有遗忘个体;

3) 应用本文提出的多维观点动力学模型,复现了“多元无知”这一经典的社会现象;

4) 给出了从众压力的恢复力越小,表达观点与私人观点的差异越大这一重要结论,并且分析了逻辑矩阵对表达观点和私人观点演化的影响.

## 1 问题描述

本节首先介绍图论中的一些基本概念<sup>[27]</sup>.设  $\mathcal{G} = (V, \varepsilon, W)$  是一个具有加权邻接矩阵的有向图,其中,  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  和  $\varepsilon \subseteq V \times V$  分别表示节点的集合和边的集合,非负矩阵  $W = [w_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为加权邻接矩阵.如果存在从节点  $j$  到节点  $i$  的边,则  $w_{ij} > 0$ .如果节点  $i$  能够到达任意剩下的节点,则节点  $i$  称为根节点.如果所有节点都是根节点,则图  $\mathcal{G}(W)$  是强连通的.如果至少存在一个根节点,则图  $\mathcal{G}(W)$  是拟强连通的.  $\mathcal{N}_i$  表示所有能够影响个体  $i$  的个体集合.如果  $\sum_{j=1}^n w_{ij} = 1$  ( $\sum_{j=1}^n w_{ij} \leq 1$ ),则称矩阵  $W$  是行随机的(行次随机的).

**定义 1**<sup>[6]</sup>. 如果  $\lambda_i < 1$ , 则称个体  $i$  是固执的.如果个体既不是固执的也不受任何固执个体的影响,则称为遗忘个体.

**定义 2**<sup>[6]</sup>. 对于矩阵  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 如果极限  $A^* = \lim_{k \rightarrow \infty} A^k$  存在, 则称矩阵  $A$  是正则的. 如果  $A^* = \mathbf{1}_n v^T$ ,  $v \in \mathbf{R}^n$ , 则正则行随机矩阵  $A$  称为完全正则的.

本文将研究具有遗忘个体的拟强连通社交网络  $\mathcal{G}(W)$  上观点演化问题,具体的观点动力学模型描述如下:

$$\begin{cases} y_i(k+1) = \lambda_i w_{ii} y_i(k) + \lambda_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i \setminus \{i\}} w_{ij} \hat{y}_j(k) + \\ (1 - \lambda_i) y_i(0) \\ \hat{y}_i(k) = (1 - \phi_i) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \varphi_{ij} \hat{y}_j(k-1) + \phi_i y_i(k) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $y_i(k) \in \mathbf{R}$  和  $\hat{y}_i(k) \in \mathbf{R}$  分别表示个体  $i$  在  $k$  时刻的私人观点和表达观点,  $i \in \mathbf{I}[1, n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . 注意到, 在 Ye 等<sup>[24]</sup>的工作中, 社交网络  $\mathcal{G}(W)$  是强连通的和非周期的, 且不含有遗忘个体. 与 Friedkin-Johnsen 模型<sup>[6]</sup>的本质区别是在观点动力学模型(1)中, 每个个体都包含私人观点和表达观点.

在观点动力学模型(1)中,  $\lambda_i \in [0, 1]$  表示个体  $i$  的私人观点受人际关系影响的敏感程度,  $\phi_i \in [0, 1]$  表示个体  $i$  对于从众压力的恢复程度.  $\phi_i$  的值越大, 则个体  $i$  所承受到的从众压力就越小, 意味着个体  $i$  的表达观点和私人观点之间的差异越小. 实际上, 私人观点是个体的主观观点, 个体根据上一时刻私人观点和上一时刻邻居的表达观点来更新当前时刻的私人观点. 然而, 表达观点会进行修正以符合邻居表达观点的加权平均.  $w_{ij} \geq 0$  表示个体  $i$  分配给个体  $j$  的表达观点权重且  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij} = 1, \forall i, w_{ii} \geq 0$  表示个体  $i$  对自身私人观点的自信程度. 设  $\lambda_i \in [0, 1]$  表示个体  $i$  对人际交互影响(邻居的表达观点)的敏

感程度,  $1 - \lambda_i$  则反映对于本身初始观点  $y_i(0)$  的固执程度. 类似于 Friedkin-Johnsen 模型的“耦合关系”, 令  $\lambda_i = 1 - w_{ii}$ . 模型 (1) 第 2 个子式的右侧表示个体  $i$  对于“本地舆论”的从众压力. 假设  $\varphi_{ij} \geq 0$ , 且  $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \varphi_{ij} = 1$ . 矩阵  $\Psi = [\varphi_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是行随机的, “本地舆论”对于个体的影响可以通过图  $\mathcal{G}(\Psi)$  的连通性来描述.

从众压力的形成过程并非恒定不变的, 根据通讯方式的不同, 个体承受从众压力的情况就会不同. 例如, 在较小的会议室中, 无论是否存在私下交流, 个体都可了解其余所有个体的表达观点. 在这种情况下, 所有个体的表达观点所分配的影响权重是相同的, 即

$$\varphi_{ij} = \frac{1}{n}, \quad \forall i, j \in \mathbf{I}[1, n]$$

然而, 如果个体很多, 通讯条件实际上会影响个体  $i$  对“本地舆论”的认知. 例如, 个体在大规模的网络空间里通过网络交流时, 由于距离和通讯方式的限制, 个体实际上也许无法获知部分个体的表达观点. 在这种情况下, 个体只能通过给定的通讯方式获取外部信息. 换言之, 个体通过人际影响网络认知“本地舆论”, 即

$$\varphi_{ij} = w_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathbf{I}[1, n]$$

注意到模型 (1) 的第 1 个子式可写成

$$\begin{aligned} y_i(k+1) &= \lambda_i w_{ii} y_i(k) + \lambda_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i \setminus \{i\}} w_{ij} \phi_j y_j(k) + \\ &\lambda_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i \setminus \{i\}} w_{ij} (1 - \phi_j) \sum_{l \in \mathcal{N}_j} \varphi_{jl} \hat{y}_l(k-1) + \\ &(1 - \lambda_i) y_i(0) \end{aligned} \quad (2)$$

根据式 (1) 和式 (2), 可得

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ \hat{y}(k) \end{bmatrix} = \tilde{P} \begin{bmatrix} y(k) \\ \hat{y}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_n - \Lambda) y(0) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中,

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \Lambda (\tilde{W} + \widehat{W} \Phi) & \Lambda \widehat{W} (I_n - \Phi) \Psi \\ \Phi & (I_n - \Phi) \Psi \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, 矩阵  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  和  $\Phi = \text{diag}\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  分别表示个体的固执程度和对从众压力的弹性恢复能力, 人际网络影响矩阵  $W = \tilde{W} + \widehat{W}$ ,  $\tilde{W} = \text{diag}\{w_{11}, w_{22}, \dots, w_{nn}\}$ ,  $\widehat{W} = [w_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $i \neq j$ ,  $\hat{w}_{ii} = 0, \forall i \in \mathbf{I}[1, n]$ ,  $\hat{y}(0) = y(0)$  为初始的表达观点和私人观点,  $y(1) = (\Lambda W + I_n - \Lambda) y(0)$ .

本文将研究具有遗忘个体的拟强连通社会网络

$\mathcal{G}(W)$  中表达观点和私人观点的收敛问题 (详见第 2 节). 另一方面, 为了描述多个相互依赖话题上表达观点和私人观点演化问题, 建立了多维的观点动力学模型 (详见第 3 节). 本文主要的研究框架如图 1 所示.

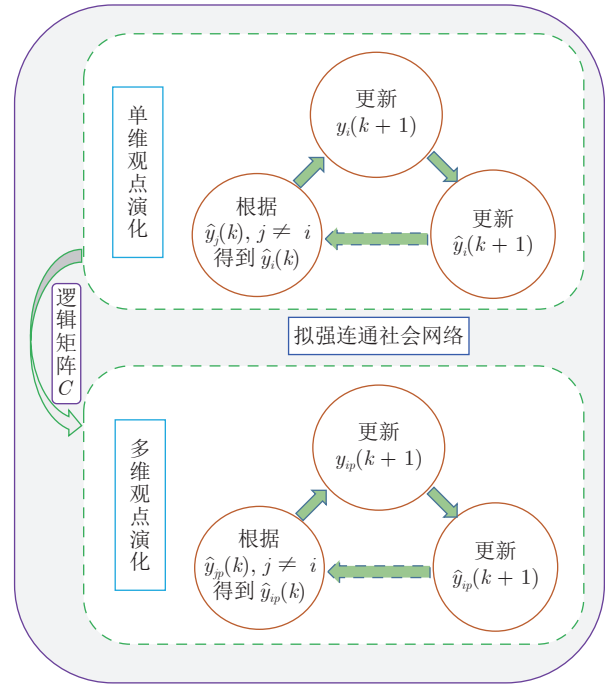


图 1 本文研究框架

Fig. 1 The research framework of this paper

## 2 收敛性分析

本节将分析拟强连通社会网络  $\mathcal{G}(W)$  中观点动力学模型 (1) 的收敛性. 为了便于分析, 将固执个体和受固执个体影响的个体编号为 1 到  $n_1$  ( $n_1 \leq n$ ), 遗忘个体的编号则为  $n_1 + 1$  到  $n$ . 根据定义 1, 易知所有遗忘个体只受邻居观点的影响 ( $\lambda_i = 1, \forall i \in \mathbf{I}[n_1 + 1, n]$ ). 故  $\tilde{W}, \widehat{W}, \Psi, \Lambda, \Phi, y, \hat{y}$  可分解为

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & 0 \\ 0 & \Phi_{22} \end{bmatrix} \\ \tilde{W} &= \begin{bmatrix} \tilde{W}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{W} = \begin{bmatrix} \widehat{W}_{11} & \widehat{W}_{12} \\ 0 & \widehat{W}_{22} \end{bmatrix} \\ \Lambda &= \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} \end{bmatrix}, \quad y(k) = \begin{bmatrix} y^{(1)}(k) \\ y^{(2)}(k) \end{bmatrix} \\ \hat{y}(k) &= \begin{bmatrix} \hat{y}^{(1)}(k) \\ \hat{y}^{(2)}(k) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中,  $m = n - n_1$  为遗忘个体量,  $y^{(1)}(k) \in \mathbf{R}^{n_1}$  和

$\hat{y}^{(1)}(k) \in \mathbf{R}^{n_1}$  分别表示固执个体的私人观点和表达观点,  $y^{(2)}(k) \in \mathbf{R}^m$  和  $\hat{y}^{(2)}(k) \in \mathbf{R}^m$  分别表示遗忘个体的私人观点和表达观点.

不同于 Ye 等<sup>[24]</sup> 所提出的观点动力学模型, 本文推广的观点动力学模型包含遗忘个体. 显然, 式 (3) 可改写为

$$\xi(k+1) = \tilde{P}\xi(k) + \begin{bmatrix} \Omega_0 y^{(1)}(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中,  $\xi(k+1) = [y^{(1)}(k+1), y^{(2)}(k+1), \hat{y}^{(1)}(k), \hat{y}^{(2)}(k)]^T$ ,  $\Omega_0 = I_{n_1} - \Lambda_{11}$ ,

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} & \tilde{P}_{13} & \tilde{P}_{14} \\ \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} & \tilde{P}_{23} & \tilde{P}_{24} \\ \tilde{P}_{31} & \tilde{P}_{32} & \tilde{P}_{33} & \tilde{P}_{34} \\ \tilde{P}_{41} & \tilde{P}_{42} & \tilde{P}_{43} & \tilde{P}_{44} \end{bmatrix} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{11} &= \Lambda_{11} (\widehat{W}_{11} + \widehat{W}_{11}\Phi_{11}) \\ \tilde{P}_{12} &= \Lambda_{11}\widehat{W}_{12}\Phi_{22} \\ \tilde{P}_{13} &= \Lambda_{11}\widehat{W}_{11}(I_{n_1} - \Phi_{11})\Psi_{11} + \Lambda_{11}\widehat{W}_{12}(I_m - \Phi_{22})\Psi_{21} \\ \tilde{P}_{14} &= \Lambda_{11}\widehat{W}_{11}(I_{n_1} - \Phi_{11})\Psi_{12} + \Lambda_{11}\widehat{W}_{12}(I_m - \Phi_{22})\Psi_{22} \\ \tilde{P}_{21} &= 0_{m \times n_1} \\ \tilde{P}_{22} &= \widehat{W}_{22}\Phi_{22} \\ \tilde{P}_{23} &= \Lambda_{22}\widehat{W}_{22}(I_m - \Phi_{22})\Psi_{21} \\ \tilde{P}_{24} &= \widehat{W}_{22}(I_m - \Phi_{22})\Psi_{22} \\ \tilde{P}_{31} &= \Phi_{11} \\ \tilde{P}_{32} &= 0_{n_1 \times m} \\ \tilde{P}_{33} &= (I_{n_1} - \Phi_{11})\Psi_{11} \\ \tilde{P}_{34} &= (I_{n_1} - \Phi_{11})\Psi_{12} \\ \tilde{P}_{41} &= 0_{m \times n_1} \\ \tilde{P}_{42} &= \Phi_{22} \\ \tilde{P}_{43} &= (I_m - \Phi_{22})\Psi_{21} \\ \tilde{P}_{44} &= (I_m - \Phi_{22})\Psi_{22} \end{aligned}$$

显然, 如果  $n_1 = n$ , 则式 (5) 退化成 Ye 等<sup>[24]</sup> 所建立的观点动力学模型. 此外, 如果  $\Psi = W$ , 则基于遗忘个体私人观点的观点动力学模型类似于 DeGroot 动力学模型<sup>[1]</sup>.

假设 1. 矩阵  $\Psi$  和  $W$  是行随机的, 网络  $\mathcal{G}(W_{11})$

是强连通且非周期的. 此外,  $\phi_i \in (0, 1), \forall i \in \mathbf{I}[1, n]$  和  $\lambda_i \in (0, 1), \forall i \in \mathbf{I}[1, n_1]$ .

引理 1<sup>[24]</sup>. 对于矩阵  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 如果  $A$  是行次随机且不可约的, 则谱半径  $\rho(A) < 1$ .

引理 2. 在假设 1 满足的条件下, 如果社会网络  $\mathcal{G}(W)$  中不含有遗忘个体 (即  $n_1 = n$ ), 则观点动力学模型 (1) 是收敛的.

证明. 根据 Ye 等<sup>[24]</sup> 的证明易知, 如果社会网络  $\mathcal{G}(W)$  中不含有遗忘个体, 则易得私人观点  $y_i(k)$  和表达观点  $\hat{y}_i(k)$  都是收敛的.  $\square$

定理 1. 在假设 1 满足的条件下, 如果矩阵  $W_{22}$  是正则的, 则具有遗忘个体的社会网络  $\mathcal{G}(W)$  中表达观点和私人观点是收敛的.

证明. 首先证明具有遗忘个体且  $\Psi = W$  的观点动力学模型 (1) 的收敛性.

设  $\zeta(k+1) = [y^{(1)}(k+1), \hat{y}^{(1)}(k), y^{(2)}(k+1), \hat{y}^{(2)}(k)]^T$ , 并且

$$P = \begin{bmatrix} B & H \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

其中,

$$B = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{13} \\ \tilde{P}_{31} & \tilde{P}_{33} \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{12} & \tilde{P}_{14} \\ \tilde{P}_{32} & \tilde{P}_{34} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{22} & \tilde{P}_{24} \\ \tilde{P}_{42} & \tilde{P}_{44} \end{bmatrix}$$

易知式 (5) 可写成

$$\zeta(k+1) = P\zeta(k) + \begin{bmatrix} \Omega_0 y^{(1)}(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

注意到遗忘个体的观点演化不受初始的表达观点和私人观点的影响, 其演化过程类似于 DeGroot 模型, 即

$$y^{(2)}(k+1) = \widehat{W}_{22}(I_m - \Phi_{22})\Psi_{22}\hat{y}^{(2)}(k-1) + \widehat{W}_{22}\Phi_{22}y^{(2)}(k) \quad (8)$$

$$\hat{y}^{(2)}(k) = (I_m - \Phi_{22})\Psi_{22}\hat{y}^{(2)}(k-1) + \Phi_{22}y^{(2)}(k) \quad (9)$$

注意到式 (8) 可写成

$$y^{(2)}(k+1) = \widehat{W}_{22} \left( (I_m - \Phi_{22})\Psi_{22}\hat{y}^{(2)}(k-1) + \Phi_{22}y^{(2)}(k) \right) \quad (10)$$

根据式 (9) 和式 (10), 可得

$$y^{(2)}(k+1) = \widehat{W}_{22} \widehat{y}^{(2)}(k) \tag{11}$$

另一方面, 由  $\Psi = W, \widetilde{W}_{22} = 0$  可得,  $\Psi_{22} = W_{22} = \widehat{W}_{22}$ . 进一步地, 由式 (11) 可得

$$y^{(2)}(k) = \widehat{W}_{22} \widehat{y}^{(2)}(k-1) \tag{12}$$

将式 (12) 代入式 (8) 中, 可得

$$\begin{aligned} y^{(2)}(k+1) &= \widehat{W}_{22} (I_m - \Phi_{22}) y^{(2)}(k) + \\ &\widehat{W}_{22} \Phi_{22} y^{(2)}(k) = \\ &\widehat{W}_{22} y^{(2)}(k) - \widehat{W}_{22} \Phi_{22} y^{(2)}(k) + \\ &\widehat{W}_{22} \Phi_{22} y^{(2)}(k) = \\ &\widehat{W}_{22} y^{(2)}(k) \end{aligned} \tag{13}$$

同理可得,  $\widehat{y}^{(2)}(k+1) = \widehat{W}_{22} \widehat{y}^{(2)}(k)$ . 由于  $\widehat{W}_{22}$  是正则的, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(2)}(k) = \widehat{W}_{22}^* y^{(2)}(0) \tag{14}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{y}^{(2)}(k) = \widehat{W}_{22}^* \widehat{y}^{(2)}(0) \tag{15}$$

故遗忘个体的私人观点  $y^{(2)}(k)$  和表达观点  $\widehat{y}^{(2)}(k)$  都收敛到  $\widehat{W}_{22}^* y^{(2)}(0)$ . 注意到

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y^{(1)}(k+1) \\ \widehat{y}^{(1)}(k) \end{bmatrix} &= B \begin{bmatrix} y^{(1)}(k) \\ \widehat{y}^{(1)}(k-1) \end{bmatrix} + \\ H \begin{bmatrix} y^{(2)}(k) \\ \widehat{y}^{(2)}(k-1) \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} \Omega_0 y^{(1)}(0) \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{16}$$

其中,

$$B = \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11} & \Lambda_{11} \widehat{W}_{11} \widetilde{P}_{33} \\ \Phi_{11} & \widetilde{P}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

由式 (14) 和式 (15) 可知, 如果  $\rho(B) < 1$ , 则式 (16) 是收敛的.

下面只需证明  $\rho(B) < 1$ . 设标记从 1 到  $n_1$  的节点属于集合  $\mathcal{V}_1$ , 剩下的节点都属于集合  $\mathcal{V}_2$ . 根据网络  $\mathcal{G}(W_{11})$  的连通性可知, 网络  $\mathcal{G}(B_{11})$  和  $\mathcal{G}(B_{22})$  都是强连通的. 进一步地, 由于矩阵  $B_{21}$  和  $B_{12}$  都存在大于 0 的元素, 故在节点集合  $\mathcal{V}_1$  和节点集合  $\mathcal{V}_2$  中, 节点之间存在双向路径. 因此, 网络  $\mathcal{G}(B)$  是强连通的.

根据矩阵  $\Lambda_{11}, \widetilde{W}_{11}, \Phi_{11}, (I_{n_1} - \Phi_{11}), \Psi_{11}$  都是非负矩阵, 可得  $B \geq 0$ . 由于  $W_{11}$  和  $\Psi_{11}$  都是行次随机矩阵, 故

$$\begin{bmatrix} \widetilde{P}_{11} & \Lambda_{11} \widehat{W}_{11} \widetilde{P}_{33} \\ \Phi_{11} & \widetilde{P}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{n_1} \\ \mathbf{1}_{n_1} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \Lambda_{11} \mathbf{1}_{n_1} \\ \mathbf{1}_{n_1} \end{bmatrix}$$

是行次随机矩阵,  $\mathbf{1}_n = [1, 1, \dots, 1]^T$ .

根据引理 1 可知,  $\rho(B) < 1$ . 因此,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta(k+1) = \begin{bmatrix} (I_{2n_1} - B)^{-1} & 0 \\ 0 & I_{2m} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} F & HD_*E \\ 0 & D_*E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(1)}(0) \\ \widehat{y}^{(1)}(0) \\ y^{(2)}(0) \\ \widehat{y}^{(2)}(0) \end{bmatrix}$$

其中,  $D_* = \lim_{k \rightarrow \infty} D^k, E = \begin{bmatrix} \Lambda_{22} W_{22} & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \Omega_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

最后, 证明具有遗忘个体且  $\Psi = (\mathbf{1}_n^T \mathbf{1}_n)/n$  的社会网络中观点的收敛性, 即个体内所有个体可接收到彼此之间的表达观点.

根据  $\Psi = (\mathbf{1}_n^T \mathbf{1}_n)/n, \mathbf{1}_n = [1, 1, \dots, 1]^T$ , 可得网络  $\mathcal{G}(D)$  是强连通的. 利用类似于证明  $\mathcal{G}(B)$  的方法, 易证  $\mathcal{G}(P)$  是强连通的. 由引理 1 可知,

$$\rho(P) < 1$$

由 Ravazzi 等<sup>[28]</sup> 的命题 1 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta(k+1) = \Omega_1 \begin{bmatrix} \Omega_0 y^{(1)}(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中,  $\Omega_1 = (I_{2n} - P)^{-1}$ . 故具有遗忘个体且  $\Psi = (\mathbf{1}_n^T \mathbf{1}_n)/n$  的社会网络中观点是收敛的.  $\square$

将定理 1 与 Ye 等<sup>[24]</sup> 的结论比较, 本文研究的社会网络  $\mathcal{G}(W)$  是拟强连通的且含有遗忘个体, 意味着观点动力学模型 (1) 更加符合现实情况且不需严格的通讯方式.

### 3 多维观点动力学分析

为了描述具有遗忘个体的社会网络中不同话题之间表达观点和私人观点的相互影响, 建立如下多维观点动力学模型:

$$\begin{cases} y_i(k+1) = \lambda_i w_{ii} C y_i(k) + \\ \lambda_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i \setminus \{i\}} w_{ij} \widehat{y}_j(k) + (1 - \lambda_i) y_i(0) \\ \widehat{y}_i(k) = (1 - \phi_i) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \varphi_{ij} C \widehat{y}_j(k-1) + \phi_i C y_i(k) \end{cases} \tag{17}$$

其中,  $y_i(k) \in \mathbf{R}^d, \widehat{y}_i(k) \in \mathbf{R}^d, i \in \mathbf{I}[1, n]$ , 逻辑矩阵  $C \in \mathbf{R}^d$  用于描述不同话题之间表达观点和私人观点的相互关系.  $y_{ip}(k) > 0.5$  表示个体  $i$  的私人观点

是支持话题  $p$ ,  $y_{ip}(k) < 0.5$  表示个体  $i$  的私人观点是反对话题  $p$ ,  $y_{ip}(k) = 0.5$  表示个体  $i$  的私人观点是中立的,  $\hat{y}_{ip}(k) > 0.5$  表示个体  $i$  的表达观点是支持话题  $p$ ,  $\hat{y}_{ip}(k) < 0.5$  表示个体  $i$  的表达观点是反对话题  $p$ ,  $\hat{y}_{ip}(k) = 0.5$  表示个体  $i$  的表达观点是中立的.

注意到将观点动力学模型 (17) 的第 2 个子式代入其第 1 个子式可得

$$y_i(k+1) = \lambda_i w_{ii} C y_i(k) + \lambda_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i \setminus \{i\}} w_{ij} \phi_j C y_j(k) + \lambda_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i \setminus \{i\}} w_{ij} (1 - \phi_j) \sum_{l \in \mathcal{N}_j} \varphi_{jl} C \hat{y}_l(k-1) + (1 - \lambda_i) y_i(0) \quad (18)$$

类似于单维情形下的式 (3), 由式 (18) 和式 (17) 的第 2 个子式可得

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ \hat{y}(k) \end{bmatrix} = (\tilde{P} \otimes C) \begin{bmatrix} y(k) \\ \hat{y}(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_n - \Lambda) \otimes I_d \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ \hat{y}(0) \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中,  $\tilde{P}$  由式 (6) 给定.

**定理 2.** 在假设 1 满足的条件下, 如果逻辑矩阵  $C$  是行随机的, 则不含有遗忘个体的社会网络  $\mathcal{G}(W)$  上观点动力学模型 (17) 是收敛的, 且收敛值为

$$\begin{bmatrix} y^* \\ \hat{y}^* \end{bmatrix} = \Omega_2 \begin{bmatrix} (I_n - \Lambda) \otimes I_d \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ \hat{y}(0) \end{bmatrix}$$

其中,  $\Omega_2 = (I_{2dn} - \tilde{P} \otimes C)^{-1}$ .

**证明.** 注意到

$$\rho(\tilde{P} \otimes C) = \rho(\tilde{P}) \rho(C) = \rho(\tilde{P})$$

其中,  $\otimes$  表示 Kronecker 积. 由  $C$  是行随机矩阵可得,  $\rho(C) = 1$ . 根据定理 1 易知, 当  $\rho(\tilde{P}) < 1$  时, 不含遗忘个体的观点动力学模型 (17) 是收敛的. 设  $y^* = \lim_{k \rightarrow \infty} y(k)$  且  $\hat{y}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{y}(k)$ . 由式 (19) 易知

$$\begin{bmatrix} y^* \\ \hat{y}^* \end{bmatrix} = (\tilde{P} \otimes C) \begin{bmatrix} y^* \\ \hat{y}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (I_n - \Lambda) \otimes I_d \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ \hat{y}(0) \end{bmatrix}$$

由上式可得观点的收敛值.  $\square$

当拟强连通社会网络  $\mathcal{G}(W)$  含有遗忘个体时, 在单维观点情形时, 式 (5) 可写成式 (7). 类似地, 在多维观点情形下有

$$\zeta(k+1) = (P \otimes C) \zeta(k) + \begin{bmatrix} (\Omega_0 \otimes I_d) y^{(1)}(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

**定理 3.** 在假设 1 满足的条件下, 如果矩阵  $W_{22}$  和  $C$  都是正则的, 则具有遗忘个体的社会网络  $\mathcal{G}(W)$  上观点动力学模型 (17) 是收敛的.

**证明.** 类似于定理 1 的证明, 根据矩阵  $\Psi$  的结构将证明过程分为两个部分.

1) 当  $\Psi = W$  时. 注意到

$$\Psi_{21} = W_{21} = 0$$

意味着遗忘个体的私人观点和表达观点不受其余固执个体的影响. 因此, 由式 (20) 可得

$$\begin{bmatrix} y^{(2)}(k+1) \\ \hat{y}^{(2)}(k) \end{bmatrix} = (D \otimes C) \begin{bmatrix} y^{(2)}(k) \\ \hat{y}^{(2)}(k-1) \end{bmatrix}$$

由于矩阵  $W_{22}$  和  $C$  都是正则的, 可得遗忘个体的观点是收敛的, 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} y^{(2)}(k+1) \\ \hat{y}^{(2)}(k) \end{bmatrix} = (D^* \otimes C^*) \begin{bmatrix} y^{(2)}(0) \\ \hat{y}^{(2)}(0) \end{bmatrix}$$

类似于定理 1 的证明, 由 Ravazzi 等<sup>[28]</sup> 的命题 1 可知,  $\hat{y}^{(1)}(k)$  和  $y^{(1)}(k)$  是收敛的, 故观点动力学模型 (17) 是收敛的.

2) 当  $\Psi = \frac{1}{n} \mathbf{1}_n^T \mathbf{1}_n$  时. 由定理 1 的证明可得

$$\rho(P) < 1$$

易知,

$$\rho(P \otimes C) = \rho(P) \rho(C) = \rho(P) < 1$$

根据 Ravazzi 等<sup>[28]</sup> 的命题 1 可知, 观点动力学模型 (17) 是收敛的, 即由式 (20) 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta(k+1) = \Omega_3 \begin{bmatrix} (\Omega_0 \otimes I_d) y^{(1)}(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中,  $\Omega_3 = (I_{2dn} - P \otimes C)^{-1}$ .

综上所述, 具有遗忘个体的社会网络  $\mathcal{G}(W)$  观点动力学模型 (17) 是收敛的.  $\square$

本节在拟强连通社会网络中, 提出新的具有遗忘个体的多维 (表达和私人) 观点动力学模型, 刻画出不同话题之间表达/私人观点的相互影响; 另一方面, 本文仅需社会网络是拟强连通, 意味着个体之间无需严格的通讯方式, 更加符合现实社会的情景, 故应用范畴取得突破.

### 4 仿真实验

#### 4.1 应用于多元无知个体

应用本文所提出的多维观点动力学模型重现“多元无知”这一经典的社会现象<sup>[20]</sup>. “多元无知”是指在一个个体中, 只要反对意见不以明确、强烈的形式表现出来, 一般成员就会产生一种错觉, 以为大家的意见都是一致的. 在现实中, 不充分的信息交流(网络是拟强连通的)是导致“多元无知”社会现象的主要原因之一, 与本文社会网络是拟强连通的条件相吻合. 考虑由7个个体组成的社会群体, 其中, 含有3个遗忘个体(蓝色). 网络结构如图2所示(未画出自环), 其所对应的网络影响矩阵为

$$W = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.3 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

以及敏感度矩阵为  $\Lambda = I_n - \text{diag}\{w_{ii}\}$ . 设个体的初始观点为

$$y(0) = \hat{y}(0) = [0.9, 0.1, 0.8, 0.1, 0.7, 0.1, 0.9]^T$$

个体恢复力参数矩阵为

$$\Phi = \text{diag}\{0.1, 0.9, 0.1, 0.9, 0.1, 0.9, 0.1\}$$

易知, 个体2, 4和6是不受外界因素影响的遗忘个体, 且持反对观点. 根据图3可得, 个体1, 3, 5和7的表达观点从开始持支持态度演化到持反对态度, 其私人观念和表达观念产生显著的差异. 这是因为从众压力的影响, 个体1, 3, 5和7不断修改已形成的表达观点来适应持反对态度的“本地舆论”. 图3中, 不同颜色的线型表示不同个体的表达/私人观点.

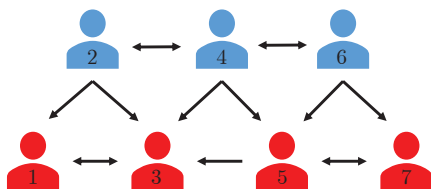


图2 具有遗忘个体的社会网络  
Fig.2 Social networks with oblivion individuals

#### 4.2 仿真分析

本节将分析逻辑矩阵  $C$  和恢复力参数  $\phi_i$  对个体私人观点与表达观点之间(差异)的影响. 考虑

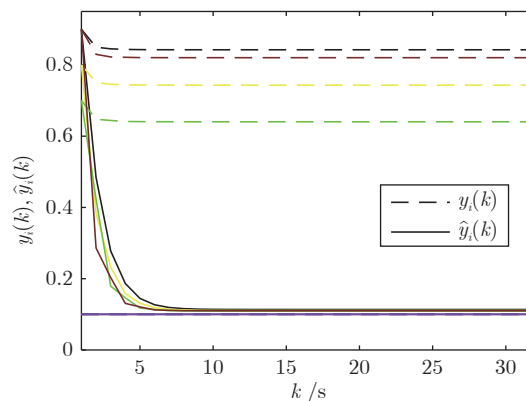


图3 多元无知  
Fig.3 Pluralistic ignorance

由7个个体组成的一个网络  $\mathcal{G}(W)$ , 其中, 含有3个遗忘个体(蓝色). 人际影响网络结构如图4所示(未画出自环), 所对应的网络影响矩阵为

$$W = \begin{bmatrix} 0.22 & 0 & 0.78 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0.1 & 0 & 0.7 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.6 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

以及敏感度矩阵为  $\Lambda = I_n - \text{diag}\{w_{ii}\}$ . 根据个体数量, 设定“本地舆论”包含所有个体的表达观点, 即,  $\Psi = (\mathbf{1}_7^T \mathbf{1}_7)/7$ . 令  $y(0) = \hat{y}(0)$ , 且

$$\hat{y}(0) = [0.8, 0.2, 0.7, 0.2, 0.8, 0.25, 0.9, 0.2, 0.6, 0.1, 0.7, 0.4, 0.8, 0.2]^T$$

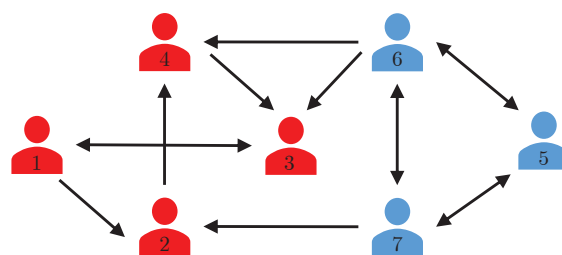


图4 具有遗忘个体的社会网络  
Fig.4 Social networks with oblivion individuals

设  $\phi_i = 0.1$ , 分别设逻辑矩阵  $C$  为

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C_1, \quad C = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} = C_2$$

由图5~11可知, 当不同话题的观点互不影响 ( $C = C_1$ ) 时, 社会网络  $\mathcal{G}(W)$  中所有个体的私

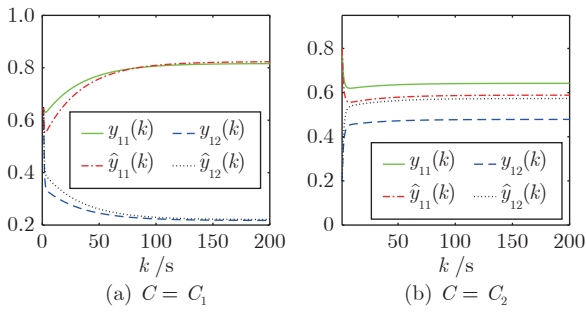


图 5 个体 1 的观点  
Fig.5 Opinions of individual 1

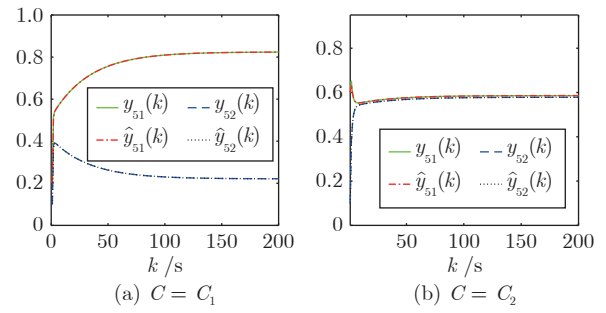


图 9 个体 5 的观点  
Fig.9 Opinions of individual 5

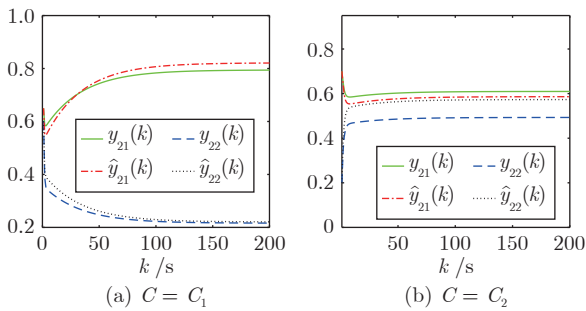


图 6 个体 2 的观点  
Fig.6 Opinions of individual 2

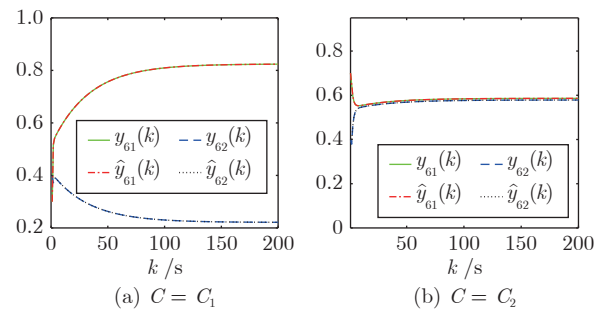


图 10 个体 6 的观点  
Fig.10 Opinions of individual 6

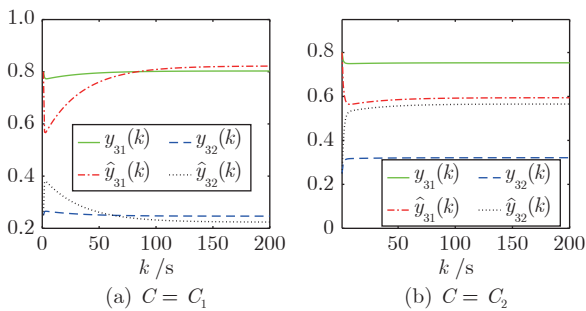


图 7 个体 3 的观点  
Fig.7 Opinions of individual 3

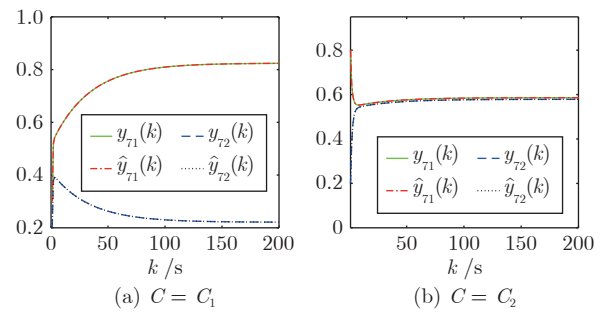


图 11 个体 7 的观点  
Fig.11 Opinions of individual 7

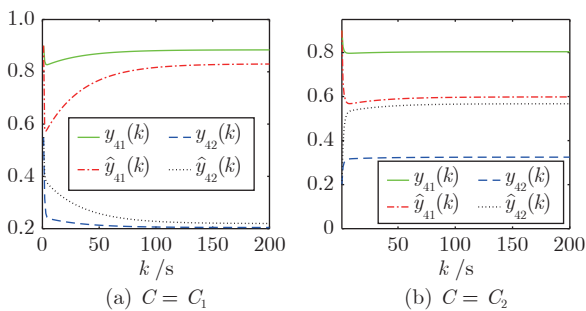


图 8 个体 4 的观点  
Fig.8 Opinions of individual 4

人观点和表达观点都是支持话题 1, 反对话题 2. 当  $C = C_2$  时, 所有个体的私人观点和表达观点都还支持话题 1, 但支持的态度有所减弱. 所有个体的表达观点却由之前都是反对话题 2 变成了支持话题 2, 个体 1 ~ 4 的私人观点仍然反对话题 2, 但反对的态度有所减弱, 遗忘个体 5 ~ 7 的私人观点由之前都是反对话题 2 演化成了支持话题 2.

进一步地, 由图 9 ~ 11 可知, 当  $C = C_1$  时, 遗忘个体 5 ~ 7 分别对于话题 1 和话题 2 的私人观点与表达观点非常相近, 相对于话题 1 和话题 2, 产生观点两极分化的现象. 当  $C = C_2$  时, 针对话题 1 和话题 2, 遗忘个体 5 ~ 7 的私人观点与表达观点都



非常相近, 产生观点一致的现象.

为了分析从众压力对于个体表达观点和私人观点差异的影响, 设  $\phi_i = 0.1$ ,  $\phi_i = 0.3$ ,  $\phi_i = 0.6$ ,  $\phi_i = 0.9$  和  $C = C_1$ . 由图 12 可知, 恢复力参数  $\phi_i$  越大, 个体的私人观点与表达观点越接近. 换言之, 从众压力越大, 个体私人观点与表达观点的差异越大. 这与现实世界的经验一致, 即个体会因外部环境的影响而适当地改变自己的主观观点. 图 12 中, 不同颜色的线型表示不同个体的表达/私人观点.

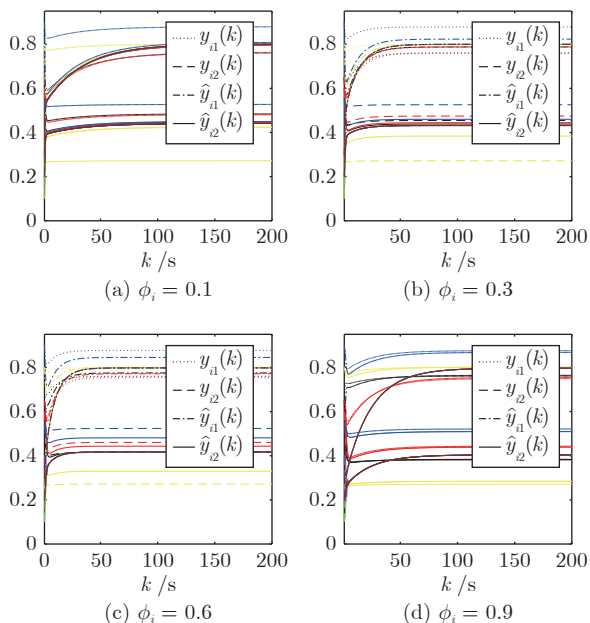


图 12 观点动力学模型 (17):  $C = C_1$

Fig.12 Opinion dynamics model (17) with  $C = C_1$

## 5 结束语

本文提出了一个新的具有遗忘个体的多维观点动力学模型, 刻画出了不同话题之间表达/私人观点的互相影响. 在社会网络是拟强连通的条件下, 根据逻辑矩阵和网络影响力矩阵的正则性, 给出了表达观点和私人观点收敛的充分条件. 应用本文所提出的观点动力学模型, 复现了“多元无知”的社会现象. 仿真分析表明从众压力的恢复力越小, 表达观点与私人观点的差异越大. 另外, 进一步讨论了逻辑矩阵对表达观点和私人观点演化的影响.

在现实社会中, 个体的表达观点在传播和演变过程中, 观点传播的速度可能受个体自由意志或者社交媒体的影响. 因此, 针对观点传播速度的研究是一个值得考虑的问题. 这是本文的不足之处. 在未来的工作中, 一方面, 在考虑时间复杂度的基础上, 建立连续型的观点动力学社会模型, 深入研究观点传播或者演化的速度; 另一方面, 借鉴探究 Bass

模型在新领域扩展应用的思想<sup>[30]</sup> 和利用 DEA 模型评价优势的思想<sup>[31]</sup>, 从一个全新的角度拓展社会网络的应用及说明观点动力学模型具有的优势.

## References

- DeGroot M H. Reaching a consensus. *Journal of the American Statistical Association*, 1974, **69**(345): 118–121
- Friedkin N E, Johnson E C. Influence networks and opinion change. *Advances in Group Processes*, 1999, **16**(1): 1–29
- Wang Long, Tian Ye, Du Jin-Ming. Opinion dynamics in social networks. *Scientia Sinica: Informationis*, 2018, **48**(1): 3–23 (王龙, 田野, 杜金铭. 社会网络上的观念动力学. *中国科学: 信息科学*, 2018, **48**(1): 3–23)
- Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, **49**(9): 1520–1533
- Zhou B, Lin Z. Consensus of high-order multi-agent systems with large input and communication delays. *Automatica*, 2014, **50**(2): 452–464
- Liu Q, Zhou B. Consensus of discrete-time multiagent systems with state, input, and communication delays. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2020, **50**(11): 4425–4437
- Zhang Meng, Han Min. Finite-time synchronization between uncertain complex networks based on unidirectional coupling method. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(7): 1624–1632 (张檬, 韩敏. 基于单向耦合法的不确定复杂网络间有限时间同步. *自动化学报*, 2021, **47**(7): 1624–1632)
- Wang Zhuo, Qin Bo-Dong, Xu Yong, Lu Ren-Quan, Wei Qing-Lai. An efficient algorithm for determining the connectivity of complex undirected networks. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(10): 2129–2136 (王卓, 秦博东, 徐雍, 鲁仁全, 魏庆来. 复杂无向网络连通性的一种高效判定算法. *自动化学报*, 2020, **46**(10): 2129–2136)
- Zhang Lian-Sheng, Jin Yao-Chu, Song Yong-Duan. An overview of dynamics analysis and control of memristive neural networks with delays. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(4): 765–779 (章联生, 金耀初, 宋永端. 时滞忆阻神经网络动力学分析与控制综述. *自动化学报*, 2021, **47**(4): 765–779)
- Pan Yong-Hao, Yu Hong-Tao. Analysis of linkage mechanism of link prediction based on network synchronization. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(12): 2607–2616 (潘永昊, 于洪涛. 基于网络同步的链路预测连边机理分析研究. *自动化学报*, 2020, **46**(12): 2607–2616)
- Parsegov S E, Proskurnikov A V, Tempo R, Friedkin N E. A new model of opinion dynamics for social actors with multiple interdependent attitudes and prejudices. In: *Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control*. Osaka, Japan: IEEE, 2015. 3475–3480
- Friedkin N E, Proskurnikov A V, Tempo R, Parsegov S E. Network science on belief system dynamics under logic constraints. *Science*, 2016, **354**(6310): 321–326
- Friedkin N E. The problem of social control and coordination of complex systems in sociology: A look at the community cleavage problem. *IEEE Control Systems Magazine*, 2015, **35**(3): 40–51
- Hegselmann R, Krause U. Opinion dynamics and bounded confidence models, analysis, and simulation. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 2002, **5**(3): 1–33
- Zhang Z, Gao Y, Li Z. Consensus reaching for social network group decision making by considering leadership and bounded confidence. *Knowledge-based Systems*, 2020, **204**: Article No. 106240
- Parsegov S E, Proskurnikov A V, Tempo R, Friedkin N E. Nov-

- el multidimensional models of opinion dynamics in social networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(5): 2270–2285
- 17 Li H J, Bu Z, Wang Z, Cao J. Dynamical clustering in electronic commerce systems via optimization and leadership expansion. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2020, **16**(8): 5327–5334
- 18 Abelson R P. Mathematical models of the distribution of attitudes under controversy. *Advances in Experimental Social Psychology*, 1964, **3**: 1–54
- 19 Taylor M. Towards a mathematical theory of influence and attitude change. *Human Relations*, 1968, **21**(2): 121–139
- 20 Asch S E. *Effects of Group Pressure Upon the Modification and Distortion of Judgments*. Pittsburgh: Carnegie Press, 1951.
- 21 Javarone M A. Social influences in opinion dynamics: The role of conformity. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2014, **414**: 19–30
- 22 Cheng C, Yu C. Opinion dynamics with bounded confidence and group pressure. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, **532**: Article No. 121900
- 23 Shang Y. Resilient consensus for expressed and private opinions. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, **51**(1): 318–331
- 24 Ye M, Qin Y, Govaert A, Anderson B D O, Cao M. An influence network model to study discrepancies in expressed and private opinions. *Automatica*, 2019, **107**: 371–381
- 25 Lin X, Jiao Q, Wang L. Opinion propagation over signed networks: Models and convergence analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, **64**(8): 3431–3438
- 26 Su W, Chen G, Hong Y. Noise leads to quasi-consensus of Hegselmann-Krause opinion dynamics. *Automatica*, 2017, **85**: 448–454
- 27 Proskurnikov A V, Tempo R. A tutorial on modeling and analysis of dynamic social networks. Part I. *Annual Reviews in Control*, 2017, **43**: 65–79
- 28 Ravazzi C, Frasca P, Tempo R, Ishii H. Ergodic randomized algorithms and dynamics over networks. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2015, **2**(1): 78–87
- 29 Prentice D A, Miller D T. Pluralistic ignorance and alcohol use on campus: Some consequences of misperceiving the social norm. *Journal of Personality and Social Psychology*, 1993, **64**(2): 243–256
- 30 Yang Zhuo-Xuan, Ma Yuan-Pei, Li Hui-Jia. The relationship between efficiency and services types of water industry enterprises in China based on DEA model. *Journal of Liaocheng University (Natural Science Edition)*, 2020, **33**(6): 12–26  
(杨卓璇, 马源培, 李慧嘉. 基于 DEA 模型的中国水行业上市企业的效率和业务类型关系研究. 聊城大学学报 (自然科学版), 2020, **33**(6): 12–26)
- 31 Ma Yuan-Pei, Yang Zhuo-Xuan, Li Hui-Jia. Innovative product diffusion forecasting combined Bass model and LTV. *Journal of Liaocheng University (Natural Science Edition)*, 2020, **33**(4): 26–32  
(马源培, 杨卓璇, 李慧嘉. 结合 Bass 模型和 LTV 的创新产品扩散预测. 聊城大学学报 (自然科学版), 2020, **33**(4): 26–32)



**刘青松** 武汉科技大学信息科学与工程学院副教授. 2019 年获哈尔滨工业大学控制科学与工程系博士学位. 主要研究方向为社会网络, 观点动力学分析, 时滞系统和多智能体系统.

E-mail: qingsongliu@wust.edu.cn

(**LIU Qing-Song** Associate professor

at the School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology. He received his Ph.D. degree from the Department of Control Science and Engineering, Harbin Institute of Technology in 2019. His research interest covers social networks, opinion dynamics analysis, time-delay systems, and multiagent systems.)



**李明鹏** 武汉科技大学信息科学与工程学院硕士研究生. 2019 年获武汉科技大学信息科学与工程学院学士学位. 主要研究方向为社会网络, 观点动力学分析.

E-mail: limingpeng1997@163.com

(**LI Ming-Peng** Master student at

the School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology. He received his bachelor degree from the School of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology in 2019. His research interest covers social networks and opinion dynamics analysis.)



**柴利** 浙江大学控制科学与工程学院教授. 2002 年获香港科技大学电子工程系博士学位. 主要研究方向为分布式优化, 滤波器组框架, 图信号处理, 网络化控制系统. 本文通信作者.

E-mail: chaili@wust.edu.cn

(**CHAI Li** Professor at the College

of Control Science and Engineering, Zhejiang University. He received his Ph.D. degree in electrical engineering from Hong Kong University of Science and Technology, China in 2002. His research interest covers distributed optimization, filter bank frames, graph signal processing, and networked control systems. Corresponding author of this paper.)