分布参数系统源控制系统设计

周笔锋 [1,2]　罗毅平 [3]　唐果宁 [1]

摘　要　针对一类分布参数系统 (Distributed parameter system, DPS), 提出了源控制方法. 将构成分布参数系统的空间分成若干分, 每份为一个节点, 在所有的节点中, 将能产生量变源头的节点定义为源节点, 跟随源节点变化的节点为跟随节点, 以此构建分布参数系统模型. 对于源节点, 根据经验函数结合反馈偏差调节设计控制器, 对跟随节点考虑源节点控制的逸散作用控制. 利用 Lyapunov 稳定性理论并结合线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 处理方法, 得出了分布式参数系统稳定源控制器存在的充分条件. 最后结合所给条件, 给出一个数值仿真说明其有效性.

关键词　分布参数系统, 源控制, Lyapunov, 线性矩阵不等式

引用格式　周笔锋, 罗毅平, 唐果宁. 分布参数系统源控制系统设计. 自动化学报, 2022, **48**(12): 3062−3066

DOI　10.16383/j.aas.c190612

Distributed Parameter Systems of Source Control

ZHOU Bi-Feng[1,2]　LUO Yi-Ping[3]　TANG Guo-Ning[1]

Abstract　The stability problem of distributed parameter systems (DPSs) is investigated. For this purpose, a source controller is developed for such a system. The space is divided into several parts, and each part is considered a node. The source of the node that produces quantitative changes is defined as the source node. The nodes that follow the change of source nodes are defined as the subsequent nodes. On the basis of these definitions, the distributed parameter system model is constructed. The designed controller for the source nodes is the empirical function combined with the feedback adjustment and that for the subsequent nodes considers the diffusion control action of the source nodes. Numerous sufficient conditions with stable source controller for distributed parameter systems are derived using Lyapunovs stability theory and the method of linear matrix inequality (LMI). A numerical simulation illustrates the effectiveness of the method under given conditions.

Key words　Distributed parameter systems (DPSs), source control, Lyapunov, linear matrix inequality (LMI)

Citation　Zhou Bi-Feng, Luo Yi-Ping, Tang Guo-Ning. Distributed parameter systems of source control. *Acta Automatica Sinica*, 2022, **48**(12): 3062−3066

收稿日期 2019-09-02　录用日期 2019-12-23

Manuscript received September 2, 2019; accepted December 23, 2019

国家自然科学基金 (11972156), 湖南省教育厅科学研究项目 (19C0418) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (11972156) and Science Research Projects of Hunan Province Education Department (19C0418)

本文责任编委 姚鹏飞

Recommended by Associate Editor YAO Peng-Fei

1. 湖南科技大学机电工程学院 湘潭 411101　2. 湖南电气职业技术学院 湘潭 411101　3. 湖南工程学院电气信息学院 湘潭 411101

1. School of Mechanical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411101　2. Hunan Electrical College of Technology, Xiangtan 411101　3. College of Electrical Information, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan 411101

实际生活中, 许多物理系统如热扩散、流体换热器、化学工程、旋转梁、可变几何形状、静电微致动器、集成和消防神经元等都具有时空特性, 它们的行为必须依赖于时间和空间位置, 这些系统的时空过程称为分布参数系统 (Distributed parameter system, DPS)[1−9]. 针对此类系统, 学者们通常根据能量守恒定律构建拟线性抛物型偏微分方程 (Quasi-linear parabolic partial differential equation) 进行研究. 所以, 以拟线性抛物型偏微分方程建模研究分布参数系统一直是国内外相关领域学者的重点研究课题[10−17].

针对分布参数系统的稳定性控制问题, 许多学者提出了各类行之有效的方法, 分布式控制[10−12] 是最早提出的一种控制方式之一, 如文献 [10] 中, Luo 等针对分布参数系统, 设计分布式控制器, 得出了分布参数系统指数稳定控制器存在的充分条件. 文献 [11] 中, Ji 等以模型参考为基础, 研究了马尔科夫跳跃分布参数系统的自适应控制问题. 分布式控制方法针对分布参数系统的所有节点进行控制, 虽然理论上能达到良好的控制效果, 但是在实际工程中对分布参数系统的所有节点进行控制往往是很难做到的. 针对此类问题, 又有学者提出了分布参数系统边界控制方案[13−16], 如文献 [13] 中, Zhang 等针对一类非线性随机分布参数系统的 H_∞ 边界控制问题, 提出了一种简单而有效的 H_∞ 边界静态输出反馈 (Static output feedback, SOF) 控制方案, 并进行了边界配置测量以保证具有 H_∞ 性能的均方意义上的局部指数稳定. 文献 [14] 中, 周延九等针对一类由半线性抛物型偏微分方程描述的分布参数系统, 提出基于边界控制的控制策略研究了其镇定问题. 边界控制方案对于低维空间 (如一维) 具有很好的效果, 但随着分布参数系统的空间维数增高, 对系统进行边界控制会比较难实现. 基于此, 有学者针对分布参数系统提出了中和控制方案, 如在文献 [17] 中, 周笔锋等针对具有时滞特性的分布参数系统, 提出并设计了中和控制器, 讨论了此类系统的稳定问题. 中和控制方案对于具有实体扩散类的分布参数系统 (如污染物扩散), 在找到对应 “解药” 后具有很好的控制效果, 但对于能量类的扩散 (如热传递) 的分布参数系统模型, 本文提出的源控制方案能达到更加优越的效果.

源控制方法是基于能量守恒定律. 首先, 将空间分成若干份, 每份空间看成一个节点, 基于每个节点与节点间的能量传递, 定义空间能量传递拓扑矩阵, 这样的系统就是一个分布参数模型. 如在一个大型会议室中, 设计中央空调的排风口时, 通常想了解会议室各个区域的温度的变化情况, 使会议室内各点温度达到一致状态. 将会议室内空间分成干份, 这样, 会议室的温度变化情况就可以看作是一个分布参数系统. 然后, 在系统空间的所有节点中, 将能使能量产生量变源头的节点空间定义为源节点, 其他节点称为跟随节点. 如前面的例子, 中央空调的排风口就是源节点, 其他的点是跟随节点.

本文所设计的源控制方法仅针对源节点, 根据经验函数设计控制器, 同时通过反馈控制作用对系统进行二次调节, 而针对其他跟随节点, 考虑分布参数系统的时空特性, 由于源节点的逸散作用, 跟随节点同样受到控制影响. 与文献 [10−12] 提出的分布式控制方法不同, 分布式控制是要对系统的每一点进行控制. 所以, 本文所提出的源控制方法在分布参数系统的实际控制上具有可操作性. 进而, 本文针对分布参数系统, 对源节点根据经验函数与反馈调节结合, 对跟随节点产生逸散控制作用, 研究分布参数系统的稳定性问题就显得尤为有意义.

基于此, 本文将构成分布参数系统的空间分成若干份, 每份为一个节点, 在所有的节点中, 将空间产生量变的源头的节点定义为源节点, 跟随源节点变化的节点为跟随节点, 研究分布参数系统的镇定问题. 对于源节点, 根据经验函数结合反馈偏差调节设计控制器, 对跟随节点考虑源节点控制的逸散作用. 利用 Lyapunov 稳定性理论并结合线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 处理方法, 得出了分布式参数系统稳定源控制器存在的充分条件. 最后结合所给条件, 给出一个数值仿真说明其有效性.

1　问题描述

考虑如下分布参数系统.

1) 源节点

$$\frac{\partial w_i(x,t)}{\partial t}=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}G_{ij}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2(w_j(x,t)-w_i(x,t))}{\partial x_k^2}+f(w_i(x,t))+u_i,\quad i=1,2,\cdots,l \tag{1}$$

2) 跟随节点

$$\frac{\partial w_i(x,t)}{\partial t}=\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}G_{ij}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2(w_j(x,t)-w_i(x,t))}{\partial x_k^2}+u_i,\quad i=l+1,l+2,\cdots,n \tag{2}$$

其中, $(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}_+$, $f(\cdot)$ 为系统源节点自激项, u_i 为控制输入. $\Omega=\{x,|x|<l<\infty\}\in\mathbf{R}^m$ 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, 且 $mes(\Omega)>0$, G_{ij} 表示系统内各节点的扩散或吸收因子, $\Delta=\sum_{k=1}^m\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ 为 Laplace 扩散–吸收算子, 根据能量守恒定律, 满足

$$\sum_{i=1}^{n}G_{ik}=-\sum_{j=1}^{n}G_{kj},\quad G_{ii}=0,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

对于 G_{ij}, 若节点 i 对节点 j 产生正效应, 则 $G_{ij}>0$, 反之, $G_{ij}<0$, 满足 $G_{ij}=-G_{ji}$, $j\neq i$.

将系统 (1) 和 (2) 改写为矩阵形式, 即

$$\frac{\partial W_L(x,t)}{\partial t}=F(W_L(x,t))+G_{Lg}\Delta W_g(x,t)+(G_L-G_{ZL})\Delta W_L(x,t)+U_L \tag{4}$$

$$\frac{\partial W_g(x,t)}{\partial t}=G_{gL}\Delta W_L(x,t)+(G_g-G_{Zg})\Delta W_g(x,t)+U_g \tag{5}$$

其中, 状态变量为

$$W_L(x,t)=(w_1(x,t),\cdots,w_l(x,t))^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^l$$

$$W_g(x,t)=(w_{l+1}(x,t),\cdots,w_n(x,t))^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^{n-l}$$

$$W(x,t)=(W_L^{\mathrm T}(x,t),W_g^{\mathrm T}(x,t))^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^n$$

$$F(W_L(x,t))=(f(w_1(x,t)),\cdots,f(w_l(x,t)))^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^l$$

3) 控制输入

$$U_L(x,t)=(u_1,\cdots,u_l)^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^l$$

$$U_g=(u_{l+1},\cdots,u_n)^{\mathrm T}\in\mathbf{R}^{n-l}$$

$$G=G_{ij},\ G_{zi}=\sum_{j=1}^{n}G_{ij}$$

$$G_Z=\mathrm{diag}\{G_{z1},\cdots,G_{zn}\}$$

满足

$$G_Z=\begin{bmatrix}G_{ZL}&0\\0&G_{Zg}\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}G_L&G_{Lg}\\G_{gL}&G_g\end{bmatrix}$$

注 1. 矩阵 G 为系统扩散–吸收因子矩阵, 对于系统源节点, 系统扩散因子大于吸收因子, 即满足 $G_L-G_{ZL}>0$.

系统初始边界条件为

$$W(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,+\infty) \tag{6}$$

或

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial\theta}=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,+\infty) \tag{7}$$

其中, θ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量.

2　控制器设计

定义 1. 分布参数系统源控制. 将构成分布参数系统的空间分成若干个子空间, 每个子空间视为一个节点, 在系统所有的节点中, 将空间产生量变源头的节点定义为源节点, 跟随源节点变化的节点为跟随节点. 源控制为仅对系统源节点进行控制作用, 对于跟随节点, 其控制作用为对源节点的控制逸散作用.

引理 1[18]**.** 设 $\Omega\in\mathbf{R}^n$ 是边界 $\partial\Omega$ 内的光滑有界区域, θ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量, $G\subset\Omega$ 为一光滑子域, 若 $u,v\in C^2(\bar G)$, 则

$$\int_G u\Delta v\mathrm{d}x=\int_{\partial G}u\frac{\partial v}{\partial\theta}\mathrm{d}s-\int_\Omega\nabla u\nabla v\mathrm{d}x \tag{8}$$

其中, ∇ 表示 Hamiltion 算子, $\mathrm{d}s$ 表示边界区域的面积微元.

假设 1[19]**.** 存在常数 $L>0$, 以及存在正定矩阵 $\Gamma\in\mathbf{R}^{n\times n}$, 对于任意 $x,y\in\mathbf{R}^{n\times n}$. 对于非线性函数 $f(\cdot)$, 满足

$$(x-y)^{\mathrm T}(f(x)-f(y))\le L(x-y)^{\mathrm T}\Gamma(x-y) \tag{9}$$

为使系统达到稳定状态, 对源节点设计控制器

$$u_i=-\hat f(w_i(x,t))+\sum_{j=1}^{l}k_{ij}w_j(x,t),\quad i=1,\cdots,l \tag{10}$$

对于跟随节点, 其控制输入为源节点逸散控制, 满足

$$u_i=\sum_{j=1}^{l}b_{ij}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial^2(\varphi_i w_j(x,t)-w_i(x,t))}{\partial x_k^2},\quad i=l+1,\cdots,n \tag{11}$$

其中, k_{ij} 为控制增益, $K=(k_{ij})_{l\times l}$, b_{ij} 表示源节点作用在该节点的逸散因子, $B=(b_{ij})_{(n-l)\times l}$, $\varphi=\mathrm{diag}\{\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-l}\}$ 表示源节点对跟随节点可作用因子, $\hat f(\cdot)$ 表示 $f(\cdot)$ 的经验函数, 设 $ff(\cdot)=f(\cdot)-\hat f(\cdot)$, 满足 $ff(0)=0$.

令

$$\Psi=\mathrm{diag}\left\{\sum_{j=1}^{l}b_{1j},\cdots,\sum_{j=1}^{l}b_{(n-l)j}\right\}$$

$$\hat F(W_L(x,t))=(\hat f(w_1(x,t)),\cdots,\hat f(w_l(x,t)))$$

$$FF(W_L(x,t))=F(W_L(x,t))-\hat F(W_L(x,t))$$

由此, 式 (4) 和 (5) 中, U_L 与 U_g 满足

$$U_L = -\hat{F}(W_L(x,t)) + KW_L(x,t)$$

$$U_g = \varphi B\Delta W_L(x,t) - \Psi\Delta W_g(x,t)$$

3 主要结论

通过构造合适的 Lyapunov-Krasovskii 函数, 结合 LMI, 由 Green 公式和矩阵不等式处理法, 根据 Lyapunov 稳定性理论, 可以得出所讨论系统状态渐近稳定的结果.

定理 1. 在假设 1 条件下, 关于系统源系统节点 (1) 及跟随系统节点 (2), 对于任意给定的正定矩阵 P, Q, 若存在矩阵 K, 使得如下线性矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} \Pi_1+\Pi_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_2 & \Pi_4 \\ 0 & * & \Pi_3+\Pi_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0 \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}
&\Pi_1 = 2pLI + 2X_1\\
&\Pi_2 = -p(G_L - G_{ZL}) - p(G_L - G_{ZL})^{\mathrm{T}}\\
&\Pi_3 = -Q(G_g - G_{Zg}) + X_3\\
&\Pi_4 = -pG_{Lg} - G_{gL}^{\mathrm{T}}Q + X_2\\
&X_1 = pK\\
&X_2 = B^{\mathrm{T}}\varphi^{\mathrm{T}}Q\\
&X_3 = Q\Psi
\end{aligned}$$

则系统 (1) 和 (2) 在给出的边界条件和源控制器 (10) 和 (11) 下是渐近稳定的, 符号 “$*$”代表矩阵的对称项.

证明. 构造 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$\begin{aligned} V = &\frac{1}{2}\int_\Omega \Big(W_L^{\mathrm{T}}(x,t)PW_L(x,t) + \\ &W_g^{\mathrm{T}}(x,t)QW_g(x,t)\Big)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{13}$$

$$\dot{V} = \int_\Omega \left(W_L^{\mathrm{T}}(x,t)P\dot{W}_L(x,t) + W_g^{\mathrm{T}}(x,t)Q\dot{W}_g(x,t)\right)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\dot{V} = &\int_\Omega \Big(W_L^{\mathrm{T}}(x,t)P(F(W_L(x,t)) - \hat{F}(W_L(x,t))) + \\
&W_L^{\mathrm{T}}(x,t)PKW_L(x,t) + \\
&W_L^{\mathrm{T}}(x,t)P(G_L - G_{ZL})\Delta W_L(x,t) + \\
&W_g^{\mathrm{T}}(x,t)Q(G_{gL} + \varphi B)\Delta W_L(x,t) + \\
&W_g^{\mathrm{T}}(x,t)Q(G_g - G_{Zg} - \Psi)\Delta W_g(x,t) + \\
&W_L^{\mathrm{T}}(x,t)PG_{Lg}\Delta W_g(x,t)\Big)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

取 $p = \lambda_{\max}(P)$, 由假设 1, 有

$$\begin{aligned}\dot{V} \le &\int_\Omega \Bigg(pLW_L^{\mathrm{T}}(x,t)W_L(x,t) + \\
&pW_L^{\mathrm{T}}(x,t)KW_L(x,t) + \\
&\begin{bmatrix} W_L(x,t) \\ W_g(x,t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \times \\
&\begin{bmatrix} p(G_L - G_{ZL}) & pG_{Lg} \\ Q(G_{gL}+\varphi B) & Q(G_g - G_{Zg} - \Psi)\end{bmatrix} \times \\
&\begin{bmatrix} \Delta W_L(x,t) \\ \Delta W_g(x,t)\end{bmatrix}\Bigg)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令

$$W(x,t) = \begin{bmatrix} W_L(x,t) \\ W_g(x,t)\end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} p(G_L - G_{ZL}) & pG_{Lg} \\ Q(G_{gL}+\varphi B) & Q(G_g - G_{Zg} - \Psi)\end{bmatrix}$$

$$I(t) = \int_\Omega W^{\mathrm{T}}(x,t)\Gamma\Delta W(x,t)\mathrm{d}x$$

利用引理 1 和边界条件

$$\begin{aligned} I(t) = &\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}\int_\Omega w_i(x,t)\Delta w_i(x,t)\mathrm{d}x = \\
&\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}\Bigg[\int_{\partial\Omega} w_i(x,t)\frac{\partial w_i(x,t)}{\partial\theta}\mathrm{d}x - \\
&\int_\Omega \nabla w_i(x,t)\nabla w_i(x,t)\mathrm{d}x\Bigg] = \\
&-\int_\Omega \nabla W^{\mathrm{T}}(x,t)\Gamma\nabla W(x,t)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{V} \le &\int_\Omega \Bigg(pLW_L^{\mathrm{T}}(x,t)W_L(x,t) + \\
&pW_L^{\mathrm{T}}(x,t)KW_L(x,t) - \\
&\begin{bmatrix} \nabla W_L(x,t) \\ \nabla W_g(x,t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \times \\
&\begin{bmatrix} p(G_L - G_{ZL}) & pG_{Lg} \\ Q(G_{gL}+\varphi B) & Q(G_g - G_{Zg} - \Psi)\end{bmatrix} \times \\
&\begin{bmatrix} \nabla W_L(x,t) \\ \nabla W_g(x,t)\end{bmatrix}\Bigg)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即存在

$$\dot{V} = \int_\Omega \eta^{\mathrm{T}}(t)\Phi\eta(t)\mathrm{d}x$$

其中

$$\eta(t) = col\,\{W_L(x,t), \nabla W_L(x,t), \nabla W_g(x,t)\}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Xi_2 & -pG_{Lg} \\ 0 & \Xi_3 & \Xi_4\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\Xi_1 = pLI + pK\\
&\Xi_2 = -p(G_L - G_{ZL})\\
&\Xi_3 = -Q(G_{gL}^{\mathrm{T}} + \varphi B)\\
&\Xi_4 = -Q(G_g - G_{Zg} - \Psi)
\end{aligned}$$

若 $\Phi + \Phi^{\mathrm{T}} < 0$, 则 $\Phi < 0$, 令

$$\begin{aligned}
&X_1 = pK\\
&X_2 = B^{\mathrm{T}}\varphi^{\mathrm{T}}Q\\
&X_3 = Q\Psi
\end{aligned}$$

所以, 若

$$\begin{bmatrix} \Pi_1+\Pi_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_2 & \Pi_4 \\ 0 & * & \Pi_3+\Pi_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0$$

其中

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= 2pLI + 2X_1\\
\Pi_2 &= -p(G_L - G_{ZL}) - p(G_L - G_{ZL})^{\mathrm{T}}\\
\Pi_3 &= -Q(G_g - G_{Zg}) + X_3\\
\Pi_4 &= -pG_{Lg} - G_{gL}^{\mathrm{T}}Q + X_2
\end{aligned}$$

则 $\dot{V} < 0$. □

定理 1 给出了非线性分布参数系统源控制镇定性的充分条件, 下面对一般线性分布参数系统这一特殊情形, 给出相应系统镇定的一个推论.

对于源节点:

$$\frac{\partial W_L(x,\,t)}{\partial t} = AW_L(x,\,t) + G_{Lg}\Delta W_g(x,\,t) + (G_L - G_{ZL})\Delta W_L(x,\,t) + U_L \tag{14}$$

对于跟随节点:

$$\frac{\partial W_g(x,\,t)}{\partial t} = G_{gL}\Delta W_L(x,\,t) + (G_g - G_{Zg})\Delta W_g(x,\,t) + U_g \tag{15}$$

推论 1. 对于源节点系统 (14) 及跟随节点系统 (15), 任意给定的正定矩阵 P, Q, 若存在矩阵 K, 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 + \Phi_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0\\ 0 & \Phi_2 & -pG_{Lg} - G_{gL}^{\mathrm{T}}Q + X_2\\ 0 & * & \Phi_3 + \Phi_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0 \tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= 2pAI + 2X_1\\
\Phi_2 &= -p(G_L - G_{ZL}) - p(G_L - G_{ZL})^{\mathrm{T}}\\
\Phi_3 &= -Q(G_g - G_{Zg}) + X_3\\
X_1 &= pK\\
X_2 &= B^{\mathrm{T}}\varphi^{\mathrm{T}}Q\\
X_3 &= Q\Psi
\end{aligned}$$

则系统 (14) 和 (15) 在给出的边界条件以及源控制器 (10) 和 (11) 下是渐近稳定的, 符号 "$*$" 代表矩阵的对称项.

证明. 构造 Lyapunov-Krasovskii 函数

$$V = \int_{\Omega}\left(W_L^{\mathrm{T}}(x,\,t)PW_L(x,\,t) + W_g^{\mathrm{T}}(x,\,t)QW_g(x,\,t)\right)\mathrm{d}x$$

证明参考定理 1. □

4 数值仿真

为了说明问题, 考虑如下分布参数系统及控制系统

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial W_L(x,\,t)}{\partial t} = F(W_L(x,\,t)) + G_{Lg}\Delta W_g(x,\,t) + \\
\qquad (G_L - G_{ZL})\Delta W_L(x,\,t) + U_L\\
\dfrac{\partial W_g(x,\,t)}{\partial t} = G_{gL}\Delta W_L(x,\,t) + \\
\qquad (G_g - G_{Zg})\Delta W_g(x,\,t) + U_g
\end{cases}$$

对分布参数系统, 取源节点为 $l = 1$, 随节点 $n - l = 3$, 系统参数非线性函数与经验函数误差满足: $L = 4.5$, 扩散–吸收因子 $G = \begin{bmatrix} G_L & G_{Lg}\\ G_{gL} & G_g \end{bmatrix}$, 其中, $G_L = 0$, $G_{Lg} = [-1,\,-0.1,\,-0.01]$, $G_g = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & -0.05\\ 0.5 & 0 & -0.25\\ 0.05 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$, 所以, $G_{ZL} = -1.11$, $G_{Zg} = \mathrm{diag}\{0.45,\,0.35,\,0.31\}$.

应用定理 1 所提出的方法, 通过 MATLAB 软件中的 LMI 工具箱, 可以得到控制系统参数: $K = -4.9603$, $B = [-1,\,-3,\,-3.8]^{\mathrm{T}}$, $\varphi = \mathrm{diag}\{0.4569,\,0.0152,\,0.0012\}$, 即, $\Psi = \mathrm{diag}\{-1,\,-3,\,-3.8\}$.

给定系统的初始条件: $w_1(x,\,0) = \exp(0.7\times(-x+5))$, $w_2(x,\,0) = 10\times\sin(x)$, $w_3(x,\,0) = \sin(2\times x)$, $w_4(x,\,0) = 0.1\times\sin(3\times x)$, 图 1 和图 2 分别给出了系统源节点状态和系统跟随的状态图.

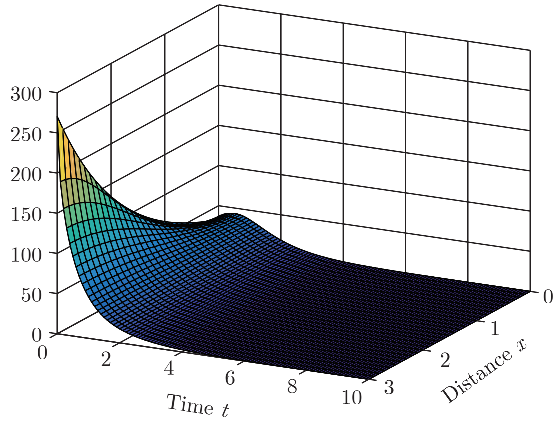
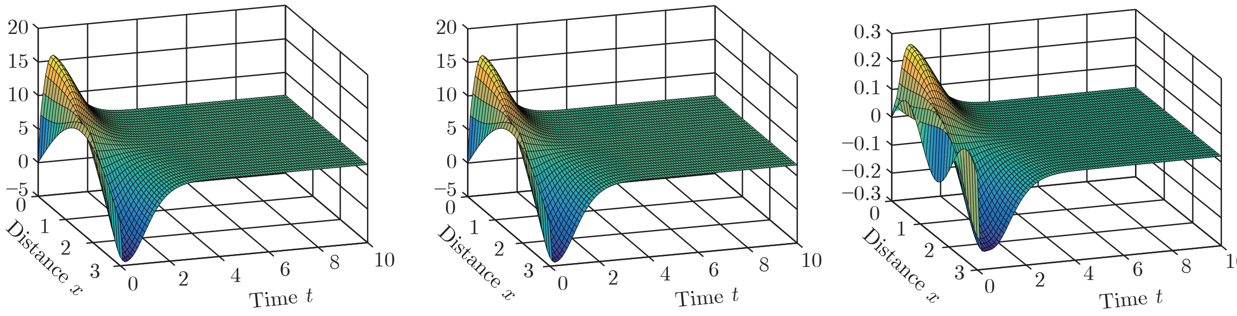


图 1 系统源节点 $W_L(x,\,t)$ 状态图

Fig. 1 The system state of source nodes $W_L(x,\,t)$



(a) 跟随节点 $W_2(x,\,t)$ 状态图
(a) The state of following nodes $W_2(x,\,t)$

(b) 跟随节点 $W_3(x,\,t)$ 状态图
(b) The state of following nodes $W_3(x,\,t)$

(c) 跟随节点 $W_4(x,\,t)$ 状态图
(c) The state of following nodes $W_4(x,\,t)$

图 2 系统跟随节点 $W_g(x,\,t)$ 状态图

Fig. 2 The system state of following nodes $W_g(x,\,t)$

5 小结

本文将构成分布参数系统的空间分成若干份, 每份为一个节点, 在所有的节点中, 将能产生量变的源头定义为源节点, 跟随源节点变化的节点定义为跟随节点, 由此构建分布参数系统模型. 对于源节点, 根据经验函数结合反馈偏差调节设计控制器; 对于跟随节点, 考虑源节点控制的逸散作用, 设计控制器, 利用 Lyapunov 稳定性理论并结合 LMI 处理方法, 得出了分布式参数系统稳定源控制器存在的充分条件. 最后结合所给条件, 给出一个数值仿真并说明其有效性.

References

1 Ray W H. *Advanced Process Control*. New York: McGraw-Hill, 1981.

2 Christofides P D. *Nonlinear and Robust Control of PDE Systems*. Boston: Birkhauser Boston, 2001.

3 Deng H, Li H X, Chen G R. Spectral approximation based intelligent modeling for distributed thermal processes. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005, **13**(5): 686−700

4 Padhi R, Ali S F. An account of chronological developments in control of distributed parameter systems. *Annual Reviews in Control*, 2009, **33**(1): 59−68

5 Baillieul J. Linearized models for the control of rotating beams. In: Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control. Austim, TX, USA: IEEE, 1988: 1726−1731

6 Najar F, Choura S, Abdel-Rahman E M, El-Borgi S, Nayfeh A. Dynamic analysis of variable-geometry electrostatic microactuators. *Journal of Micromechanics Microengineering*, 2006, **16**(11): 2449−2457

7 Cheng L, Doiron B. Correction: Divisive gain modulation with dynamic stimuli in integrate-and-fire Neurons. *Plos Computational Biology*, 2009, **5**(4): e1000365

8 Lan Y H, Wu B, Shi Y X, Luo Y P. Iterative learning based consensus control for distributed parameter multi-agent systems with time-delay. *Neurocomputing*, 2019, **357**(10): 77−85

9 Lan Y H, Xia J J, Xia Y P, Li P, Shiy Y X. Iterative learning consensus control for multi-agent systems with fractional order distributed parameter models. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2019, **17**(11): 2839−2849

10 Luo Y P, Xia W H, Liu G R, Deng F Q. LMI approach to exponential stabilization of distributed parameter control systems with delay. *Acta Automatica Sinica*, 2009, **35**(3): 299−304

11 Ji H H, Cui B T, Liu X Z. Adaptive control of Markov jump distributed parameter systems via model reference. *Fuzzy Sets and Systems*, 2019, **392**: 115−135

12 Wang Z P, Wu H N. Finite dimensional guaranteed cost sampled-data fuzzy control for a class of nonlinear distributed parameter systems. *Information Sciences An International Journal*, 2016, **327**: 21−39

13 Zhang X M, Wu H N. H_∞ boundary control for a class of nonlinear stochastic parabolic distributed parameter systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, **29**(14): 4665−4680

14 Zhou Yan-Jiu, Cui Bao-Tong. Boundary control of the distributed parameter systems described by a class of semi-linear parabolic partial differential equations. *Control and Decision*, 2019, **34**(12): 2594−2602
(周延九, 崔宝同. 一类半线性抛物型偏微分方程描述的分布参数系统的边界控制. 控制与决策, 2019, **34**(12): 2594−2602)

15 Wang J W, Wu H N, Sun C Y. Local exponential stabilization via boundary feedback controllers for a class of unstable semi-linear parabolic distributed parameter processes. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, **354**(13): 5221−5244

16 Luan Xiao-Li, Li Kai, Liu Fei. Disturbance decoupling for hyperbolic-type distributed parameter systems with boundary control. *Control and Decision*, 2016, **31**(2): 256−260
(栾小丽, 李凯, 刘飞. 双曲线型分布参数系统边界控制下的干扰解耦. 控制与决策, 2016, **31**(2): 256−260)

17 Zhou Bi-Feng, Luo Yi-Ping. Distributed parameter systems of neutralization control with delay. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(12): 2222−2227
(周笔锋, 罗毅平. 时滞分布参数系统中和控制器设计. 自动化学报, 2018, **44**(12): 2222−2227)

18 Cui Bao-Tong, Lou Xu-Yang. *Theory and Application of Time-delay Distributed Parameter System*. Beijing: National Defense Industry press, 2009. 8−12
(催宝同, 楼旭阳. 时滞分布参数系统理论及其应用. 北京: 国防工业出版社, 2009. 8−12)

19 Song Q, Cao J. D. On pinning synchronization of directed and undirected complex dynamical networks. *IEEE Transactions on Circuits Systems Part I Regular Papers*, 2010, **57**(3): 672−680

周笔锋 湖南科技大学博士研究生. 2015 年获得湖南工程学院硕士学位. 主要研究方向为复杂网络系统, 分布参数系统, 永磁同步电机退磁振动.
E-mail: zhoubifeng99@163.com
(**ZHOU Bi-Feng** Ph.D. candidate at Hunan University of Science and Technology. He received his master degree in power engineering from Hunan Institute of Engineering in 2015. His research interest covers complex networks, distributed parameter systems, and demagnetization vibration of PMSM.)

罗毅平 湖南工程学院教授. 2006 年获得华南理工大学博士学位. 主要研究方向为神经网络, 模式识别, 复杂网络系统, 分布参数系统. 本文通信作者.
E-mail: lyp8688@sohu.com
(**LUO Yi-Ping** Professor at Hunan Institute of Engineering. He received his Ph.D. degree from South China University of Technology. His research interest covers neural network, pattern recognition, complex network, and distributed parameter systems. Corresponding author of this paper.)

唐果宁 湖南科技大学教授. 主要研究方向为永磁同步电机退磁振动, 超细振动磨机研究.
E-mail: tangguoning99@163.com
(**TANG Guo-Ning** Professor at Hunan University of Science and Technology. His research interest covers demagnetization vibration of PMSM and ultra-fine vibration mill.)