

# 基于中心对称多胞体的故障可分离性评价

王桢榕<sup>1</sup> 王振华<sup>1</sup> 沈毅<sup>1</sup>

**摘要** 针对包含幅值有界而分布形式未知的故障及输入干扰项的线性离散系统, 提出了一种新的系统故障可分离性的量化评价方法. 故障可分离性是故障可诊断性中的重要部分, 针对现有方法中基于方向相似度的故障可分离性评价方法存在的不足加以补充, 提出了利用中心对称多胞体对故障可分离性进行分析, 将中心对称多胞体集合转化为多面体的表示形式, 以达到对故障可分离性量化评价的目的, 同时给出了具体评价原理和评价指标. 最后, 通过数值仿真算例, 验证了该方法的有效性和优越性.

**关键词** 动态系统, 中心对称多胞体, 故障可分离性, 方向相似度

**引用格式** 王桢榕, 王振华, 沈毅. 基于中心对称多胞体的故障可分离性评价. 自动化学报, 2022, 48(8): 1921–1930

**DOI** 10.16383/j.aas.c190770

## Fault Isolability Evaluation Based on Zonotope

WANG Zhen-Rong<sup>1</sup> WANG Zhen-Hua<sup>1</sup> SHEN Yi<sup>1</sup>

**Abstract** This paper proposes a new quantitative evaluation method for fault isolability of the linear discrete systems subject to faults and input disturbances which are bounded but with unknown distributions. Fault isolability evaluation is an important part of fault diagnosis. In order to improve the existing direction similarity-based method, we propose a new fault isolability method via using zonotopes. To achieve the quantitative evaluation of fault isolability, zonotopes are converted into polytopes. Specific evaluation principles and indices are provided. Finally, numerical examples demonstrate the effectiveness and advantages of the proposed method.

**Key words** Dynamic system, zonotope, fault isolability, directional similarity

**Citation** Wang Zhen-Rong, Wang Zhen-Hua, Shen Yi. Fault isolability evaluation based on zonotope. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(8): 1921–1930

近年来, 现代控制系统变得越来越复杂, 一旦控制系统发生故障, 就可能导致灾难性事故<sup>[1-4]</sup>. 例如, 2019 年 3 月 10 日, 埃塞俄比亚航空一架波音 737-8 飞机起飞不久后坠毁, 经过初步调查表明导致事故发生的元凶很可能在于飞机的机动特性增强系统, 而同时飞机又缺乏相应的故障诊断, 进而导致了惨剧的发生<sup>[5]</sup>. 传统提高控制系统安全性的方法是提高系统各个部件的可靠性, 但在实际环境中并不能保证系统的无故障运行, 所以故障诊断技术现在已经成为自动控制领域中一个十分重要的分支<sup>[6-7]</sup>.

故障可诊断性一般用于衡量故障能够被准确和

有效识别的程度, 文献 [8] 中将系统故障可诊断性分为固有和实际可诊断性两种. 固有可诊断性是系统的固有属性, 实际可诊断性就是在固有可诊断性的基础上考虑系统运行的实际因素, 根据关注问题的不同, 各个系统考虑的影响因素也不尽相同<sup>[9-13]</sup>. 故障可诊断性包括故障可检测性和故障可分离性, 其中故障可分离性包括了可分离性评价和设计两方面<sup>[14]</sup>. 一个系统的故障可分离性是客观存在的, 它与系统的测量信息密切相关, 但系统中可能存在某些故障以及干扰影响, 使得系统的测量信息表征几乎相同, 这就需要先对故障可分离性进行评价. 若系统故障不可分离, 则故障诊断思路就会失效, 故对系统故障可分离性的评价是实现故障诊断算法设计的前提<sup>[15]</sup>.

故障可分离性评价方法从广义上来讲可分为两大类: 不依赖于控制系统解析模型的方法和基于系统解析模型的方法<sup>[16]</sup>. 不依赖于解析模型方法的核心是要获取大量真实反映系统特征的样本数据<sup>[17]</sup>, 如文献 [18-19] 设计了基于数据的故障可分离性量化评价指标. 文献 [18] 结合了平方预测误差和  $T^2$  对多维故障可检测性条件进行分析, 完成了故

收稿日期 2019-11-07 录用日期 2020-02-07

Manuscript received November 7, 2019; accepted February 7, 2020

国家自然科学基金 (61773145, 61973098), 哈尔滨工业大学深空探测着陆与返回技术国防重点学科基金 (HIT.KLOF.2018.073) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (61773145, 61973098) and the Key Laboratory Opening Funds of Harbin Institute of Technology (HIT.KLOF.2018.073)

本文责任编辑 杨浩

Recommended by Associate Editor YANG Hao

1. 哈尔滨工业大学航天学院 哈尔滨 150001

1. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001

障可分离性研究; 文献 [19] 利用两个不同故障状态之间的模糊集相似度大小完成量化评价, 模糊集差别越大, 则两者越容易被隔离.

然而从控制系统设计的角度出发, 人们更希望通过系统的解析模型实现故障可分离性的量化评估. 基于解析模型的故障可分离性量化评价方法通过完善的系统建模技术重构了系统的动态行为<sup>[20-23]</sup>, 近年来有了一些初步研究成果. 文献 [24] 运用了以测量概率分布差异度为基础的 Kullback-Leibler (K-L) 散度, 结合了假设检验方法, 提出了一种数据量化分类的方法. 以此为理论依据, 文献 [25] 对一般线性系统利用 K-L 散度进行了故障可分离性量化评估. 由于残差概率密度函数是基于 K-L 散度的故障可诊断性定量评价的计算基础, 文献 [26] 在结合 K-L 散度的基础上引入了稀疏内核密度估计方法, 使得残差概率密度函数的估算更精确、更光滑. 然而上述方法均需设计残差从而实现可分离性评价, 残差的设计过程直接影响了评价结果, 即评价结果严重依赖于诊断算法的精度, 同时基于 K-L 散度的可分离性评价方法在实际应用中对于一类本身可被检测的故障模式是失效的<sup>[25]</sup>.

为了解决这个问题, 文献 [27] 运用时间迭代的方法, 将动态系统映射成静态系统, 引入了方向相似度概念, 从而实现包含已知分布形式干扰的系统故障可分离性量化评价. 然而该方法在具体应用过程中存在以下不足之处: 1) 评价过程没有考虑或仅能考虑已知分布形式的干扰, 没有将故障向量考虑在评价指标中; 2) 在对系统进行空间映射过程中, 该方法需要引入矩阵零空间的左正交基, 然而选取不同的零空间左正交基会将系统映射到不同的空间, 这会导致在短时间窗口长度条件下量化评价指标结果不统一的情况发生, 由于诊断时间直接影响着控制系统的性能<sup>[28]</sup>, 我们通常希望在故障发生初期即可有效完成故障可分离性评价, 所以该方法的应用会受到时间窗口长度大小的限制.

基于以上讨论, 本文提出了一种基于中心对称多胞体的故障可分离性量化评价方法并开展了相关研究. 与已有故障可分离性量化评价方法相比, 该方法基于系统解析模型, 在无需设计残差的同时弥补了基于方向相似度方法上述两点不足, 实现了可分离性的量化评价. 本文所提方法利用中心对称多胞体获得系统输出不确定性的范围, 然后将中心对称多胞体集合转化为多面体的表述形式, 用计算多面体体积大小的方式达到故障可分离性量化评价的目的. 首先, 本文阐述了基于“方向相似度”可分离性评价方法的基本原理, 并验证说明了该方法在应

用中存在的不足; 进而, 提出了一种基于中心对称多胞体的新方法实现对故障可分离性的量化评价, 并给出了具体评价流程和评价指标; 最后, 通过数学仿真算例, 验证了该方法的有效性和优越性.

**符号说明.** 文中,  $\mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{R}^{n \times m}$  分别表示  $n$  维欧氏空间和  $n \times m$  维矩阵构成的空间集合.  $\cap$  表示两集合的交集运算.  $\mathbf{I}$  和  $\mathbf{0}$  分别表示具有合适维度的单位矩阵和零矩阵或零向量.  $|H|$  表示矩阵  $H$  的行列式.  $H_{[i]}$  表示从矩阵  $H$  中删除第  $i$  行后得到的矩阵.  $\|H\|$  代表矩阵  $H$  的 2-范数.  $\binom{\phi}{\varphi}$  表示从  $\phi$  个向量中取出  $\varphi$  个向量的组合数.

## 1 基于方向相似度的可分离性评价方法

### 1.1 基于方向相似度的可分离性评价原理<sup>[27]</sup>

文献 [27] 中提出的基于方向相似度的可分离性评价方法是对于离散状态空间模型, 通过时间迭代方法得到系统输入/输出与故障模式的冗余关系, 将故障可分离性评价转化为向量余弦相似度, 进而解决已知故障模式的故障可分离性评价问题.

离散系统状态空间模型表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_u\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_f\mathbf{f}(k) + \mathbf{B}_w\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}_u\mathbf{u}(k) + \mathbf{D}_f\mathbf{f}(k) + \mathbf{D}_v\mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$  为系统状态,  $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^p$  为系统输入,  $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^m$  为系统输出,  $\mathbf{w}(k) \in \mathbf{R}^h$  和  $\mathbf{v}(k) \in \mathbf{R}^r$  为系统的未知输入干扰项 (包含干扰及噪声),  $\mathbf{f}(k) \in \mathbf{R}^q$  为加性故障向量, 即故障加性地作用在系统的输入输出上, 包括执行器故障  $\mathbf{f}_a$  和传感器故障  $\mathbf{f}_s$ , 且满足  $\mathbf{f}(k) = [\mathbf{f}_a^T(k) \quad \mathbf{f}_s^T(k)]^T$ . 矩阵  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}_u$ ,  $\mathbf{B}_f$ ,  $\mathbf{B}_w$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}_u$ ,  $\mathbf{D}_f$ ,  $\mathbf{D}_v$  是具有合适维数的矩阵.

按照有限时间序列内对式 (1) 进行迭代, 假设时间窗口长度取为  $s = k + 1$ , 可以将系统重新表示为

$$\mathcal{L}\mathbf{Z}_s = \mathcal{H}\mathbf{X}_s + \mathcal{F}\mathbf{F}_s + \mathcal{E}\mathbf{E}_s \quad (2)$$

其中, 向量  $\mathbf{Z}_s \in \mathbf{R}^{(m+p)s}$  表示系统可观测的向量, 由系统输入和输出组成,  $\mathbf{X}_s \in \mathbf{R}^{n(s+1)}$  表示状态的堆栈向量,  $\mathbf{F}_s \in \mathbf{R}^{qs}$  表示系统加性故障的堆栈向量,  $\mathbf{E}_s \in \mathbf{R}^{(h+r)s}$  表示系统干扰向量, 具体形式为

$$\mathbf{Z}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{u}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{w}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{w}(k) \\ \mathbf{v}(0) \\ \vdots \\ \mathbf{v}(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k+1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(0) \\ \mathbf{f}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(k+1) \end{bmatrix}$$

$\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{E}$  是具有合适维度的矩阵, 具体形式为

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A & -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & -I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A & -I \\ C & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} B_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_f \\ D_f & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_f & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D_f \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -B_u & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & -B_u & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -B_u \\ I & 0 & \cdots & 0 & -D_u & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \ddots & \vdots & 0 & -D_u & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I & 0 & \cdots & 0 & -D_u \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} B_w & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_w & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_w & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & D_v & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & D_v & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & D_v \end{bmatrix}$$

由式 (2), 在等号两边同左乘矩阵  $N$ , 得到

$$N\mathcal{L}\mathbf{Z}_s = N\mathcal{F}\mathbf{F}_s + N\mathcal{E}\mathbf{E}_s \quad (3)$$

其中, 矩阵  $N$  为  $\mathcal{H}$  的零空间的左正交基, 即矩阵  $N$

满足  $N\mathcal{H} = 0$ . 式中,  $N\mathcal{L}\mathbf{Z}_s$  表示可通过观测得到的系统动态行为的空间映射,  $N\mathcal{F}\mathbf{F}_s$  表示系统故障矢量的映射,  $N\mathcal{E}\mathbf{E}_s$  表示系统的干扰项.

从式 (3) 中可以看出, 经过以上变换, 系统动态行为转化为静态表述, 新系统的故障矢量是由方向向量  $N\mathcal{F}$  和故障模式  $\mathbf{F}_s$  两部分组成的. 考虑利用系统的故障方向来量化故障  $f_i$  与  $f_j$  之间的可分离性, 基于余弦相似度原理, 引入如下评价式

$$\cos\varphi_{ij} = \min \frac{(N\mathcal{F}_i)_k(N\mathcal{F}_j)_k}{\|(N\mathcal{F}_i)_k\| \|(N\mathcal{F}_j)_k\|}, \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (4)$$

其中, 下角标  $k$  表示矩阵的第  $k$  列. 因为实际系统动态过程中, 每个时刻故障指向可能是不同的, 所以需要找到最小夹角值. 该式表明在有限时间序列  $s$  内, 找到  $f_i$  与  $f_j$  故障模式下的空间最小夹角. 由于余弦函数的性质可知评价结果的取值范围为  $[0, 1]$ , 结果越趋近于 0, 证明故障可分离性越高.

需要提及的是, 在上述计算过程中将会用到如下引理:

**引理 1**<sup>[29]</sup>. 对于如下矩阵  $X \in \mathbf{R}^{a \times b}$ ,  $Y \in \mathbf{R}^{b \times c}$ ,  $Z \in \mathbf{R}^{a \times c}$ . 如果  $\text{rank}(Y) = c$ , 则方程

$$XY = Z$$

的通解为

$$X = ZY^\dagger + S[I - YY^\dagger]$$

其中,  $Y^\dagger = (Y^T Y)^{-1} Y^T$  表示  $Y$  的左伪逆矩阵,  $S \in \mathbf{R}^{a \times b}$  为任意矩阵.

## 1.2 存在的不足

上述内容阐述了基于方向相似度的故障可分离性评价原理, 但该方法在实际应用中还存在如下不足:

1) 该方法评价指标中没有考虑故障向量  $\mathbf{f}(k)$  对故障可分离性大小的影响, 而是仅从系统模型角度出发, 对不同故障间的可分离性进行评价 (评价指标见式 (4) 所示). 同时, 该方法仅能解决一类不考虑未知输入干扰或未知输入干扰的分布形式已知的控制系统. 但实际中通常无法直接忽略故障向量对可分离性大小的影响, 并且我们一般仅能知道系统故障以及未知输入干扰项的上下界, 无法得到其具体分布形式.

2) 由于该方法在计算过程中引入了零空间左正交基矩阵, 而该矩阵在计算过程中取值并不唯一, 在短时间窗口条件下, 评价结果受不同的零空间左正交基矩阵取值影响很大, 无法得到统一而准确的评价结果. 增大时间窗口长度虽然可以得到稳定的结果, 但在实际应用中, 通常我们希望在短时间内即可准确判断故障可分离性的大小. 这种局限

性可以通过以下仿真实例证明.

对于离散控制系统 (1), 系数矩阵选取为

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -0.5 \\ 0.5 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.12 & 1.05 \\ 1.52 & 3.48 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.48 & 0.39 \\ 1.0 & 0.35 \end{bmatrix}, D_v = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.54 \\ 0.25 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, D_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

假设输入  $\mathbf{u}(k)=0$ , 系统未知输入干扰项  $\mathbf{w}, \mathbf{v}$  为高斯白噪声, 满足  $\mathbf{w}(k) \sim N(0, 0.1), \mathbf{v}(k) \sim N(0, 0.5)$ . 考虑系统两执行器的加性故障, 用  $f_{ai} (i = 1, 2)$  表示. 仿真过程中, 利用引理 1 确定  $N$  的取值. 表 1 和表 2 给出了时间窗口长度  $s = 5$  和  $s = 500$  条件下  $f_{a1}$  和  $f_{a2}$  的可分离性量化评价结果.

表 1 基于方向相似度可分离性评价结果 ( $s = 5$ )  
Table 1 Fault isolability evaluation results based on directional similarity ( $s = 5$ )

次数	评价结果	次数	评价结果	次数	评价结果
1	0.0977	6	0.7662	11	0.9239
2	0.7345	7	0.0191	12	0.3114
3	0.1380	8	0.7235	13	0.6323
4	0.4580	9	0.1939	14	0.3153
5	0.2760	10	0.4178	15	0.2760

表 2 基于方向相似度可分离性评价结果 ( $s = 500$ )  
Table 2 Fault isolability evaluation results based on directional similarity ( $s = 500$ )

次数	评价结果	次数	评价结果	次数	评价结果
1	0.6481	6	0.6836	11	0.6811
2	0.6480	7	0.6885	12	0.6734
3	0.6380	8	0.6654	13	0.6559
4	0.6294	9	0.6294	14	0.6289
5	0.6698	10	0.6168	15	0.6610

由结果可以直接验证该方法受时间窗口长度限制的不足, 即只有在一个相对较大的时间窗口长度下 ( $s = 500$ ), 多次重复实验的评价结果才会趋于稳定的数值, 但在短时间窗口长度下 ( $s = 5$ ), 多次重复实验的结果无法保证统一且准确.

为了观察窗口长度对该方法结果波动的影响程度, 我们再次选取了多组时间窗口长度, 并分别进行了 100 次仿真实验. 由于极差和标准差是衡量一组数据的波动特性大小的特征数<sup>[30]</sup>, 故表 3 中给出不同窗口长度下, 多次重复仿真实验时两故障可分离性评价结果的极差和标准差, 依此来衡量不同时间窗口长度下, 数据结果分散程度的变化.

表 3 数据分散程度评价  
Table 3 Evaluation of data dispersion

窗口长度	极差 ( $R$ )	标准差 ( $\sigma$ )	窗口长度	极差 ( $R$ )	标准差 ( $\sigma$ )
5	0.9128	0.2577	225	0.1669	0.0349
10	0.7519	0.1758	250	0.1335	0.0297
50	0.3501	0.0882	375	0.1213	0.0278
100	0.2941	0.0604	450	0.0914	0.0259
175	0.1898	0.0514	500	0.0718	0.0226

通过表 3 可以看出, 在短时间窗口长度条件下, 多次重复实验的数据波动很大, 当时间窗口长度  $s = 5$  时结果数据的极差甚至近乎于 1, 随着窗口长度  $s$  的增加, 极差和标准差逐渐减小, 说明结果的波动情况逐渐趋于平稳. 我们发现只有当多次实验结果的极差和标准差稳定在一个相对较小的范围 ( $R < 0.15, \sigma < 0.03$ ) 时, 所得评价结果才是稳定且可靠的, 对上述仿真算例, 当时间窗口长度  $s > 250$  时, 该方法才能实现可靠评价. 显然, 当选取的时间窗口长度  $s$  过小时, 会导致评价结果的不准确. 所以在实际中, 该方法的应用会受到时间窗口长度大小的限制.

## 2 基于中心对称多胞体的可分离性评价方法

### 2.1 基于中心对称多胞体的可分离性评价原理

为了弥补基于方向相似度方法的不足, 本文基于中心对称多胞体设计了一种新的故障可分离性评价指标, 并给出了具体评价原理.

对于如下离散系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B_u\mathbf{u}(k) + B_f\mathbf{f}(k) + B_w\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + D_u\mathbf{u}(k) + D_f\mathbf{f}(k) + D_v\mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$  为系统状态,  $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^p$  为系统输入,  $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^m$  为系统输出,  $\mathbf{w}(k) \in \mathbf{R}^h$  和  $\mathbf{v}(k) \in \mathbf{R}^r$  为系统的未知输入干扰项 (包含干扰及噪声),  $\mathbf{f}(k) \in \mathbf{R}^q$  同样为加性故障向量, 满足  $\mathbf{f}(k) = [\mathbf{f}_a^T(k) \quad \mathbf{f}_s^T(k)]^T$ . 矩阵  $A, B_u, B_f, B_w, C, D_u, D_f, D_v$  是具有合适维度的矩阵. 考虑系统故障分离问题, 上述系统可以等价表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B_u\mathbf{u}(k) + B_{f_1}\mathbf{f}_1(k) + \\ \quad \cdots + B_{f_i}\mathbf{f}_i(k) + B_w\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + D_u\mathbf{u}(k) + D_{f_1}\mathbf{f}_1(k) + \\ \quad \cdots + D_{f_i}\mathbf{f}_i(k) + D_v\mathbf{v}(k) \end{cases} \quad (6)$$

其中,  $B_{f_i}$  和  $D_{f_i}$  分别为  $B_f$  和  $D_f$  中第  $i$  个列向量.  $\mathbf{f}_i(k) = [f_{a_i}^T(k) \ f_{s_i}^T(k)]^T$ ,  $f_{a_i}(k)$  和  $f_{s_i}(k)$  分别  $B_{f_i}$  和  $D_{f_i}$  对应的故障模式. 当不同故障模式分别作用于系统, 系统 (5) 可以一一对应如下系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B_u\mathbf{u}(k) + \\ \quad B_{f_1}\mathbf{f}_1(k) + B_w\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}_1(k) = C\mathbf{x}(k) + D_u\mathbf{u}(k) + \\ \quad D_{f_1}\mathbf{f}_1(k) + D_v\mathbf{v}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B_u\mathbf{u}(k) + \\ \quad B_{f_i}\mathbf{f}_i(k) + B_w\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{y}_i(k) = C\mathbf{x}(k) + D_u\mathbf{u}(k) + \\ \quad D_{f_i}\mathbf{f}_i(k) + D_v\mathbf{v}(k) \end{cases}$$

另外, 本文假设系统 (5) 的系统故障和未知输入干扰项均为未知但有界的, 即

$$|\mathbf{f}(k)| \leq \bar{\mathbf{f}}, \quad |\mathbf{w}(k)| \leq \bar{\mathbf{w}}, \quad |\mathbf{v}(k)| \leq \bar{\mathbf{v}}$$

其中,  $\bar{\mathbf{f}} \in \mathbf{R}^q$ ,  $\bar{\mathbf{w}} \in \mathbf{R}^h$  和  $\bar{\mathbf{v}} \in \mathbf{R}^r$  均已知.

中心对称多胞体 (Zonotope) 是由中心标称值和生成矩阵来表示一个中心对称多胞形, 并且其边界是关于中心对称的, 这是一种表示不确定性边界的描述方法<sup>[31]</sup>. 基于中心对称多胞体的故障可分离性评价方法的中心思想是利用中心对称多胞体描述各个故障模式下系统输出的中心对称多胞体的集合, 不同故障模式可能会对系统输出造成相同影响, 从而导致对应系统输出的中心对称多胞体存在交集, 这为故障可分离性的评价提供依据.

为了实现基于中心对称多胞体的故障可分离性评价, 本文需要用到如下的定义<sup>[32]</sup>和性质<sup>[33]</sup>:

**定义 1.** 对于两个集合  $\mathbf{S}_1$  和  $\mathbf{S}_2$ , 它们的闵可夫斯基和运算的定义为

$$\mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2 = \{s_1 + s_2 : s_1 \in \mathbf{S}_1, s_2 \in \mathbf{S}_2\}.$$

其中,  $\oplus$  表示闵可夫斯基和的运算符号.

**定义 2.** 一个  $m$  维中心对称多胞体是以  $\mathbf{p}$  为中心点, 以  $m$  个单一超立方体  $\mathbf{B}^m = [-\mathbf{1}, +\mathbf{1}]^m$  ( $m > n$ ) 的仿射在  $\mathbf{R}^n$  中变换形成的映射, 矢量  $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_m\} \subset \mathbf{R}^n$  表示此线性变换, 也称此中心对称多胞体的生成矩阵, 定义为

$$Z = \left\{ x \in \mathbf{R}^n : x = \mathbf{p} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{h}_i; -1 \leq \alpha_i \leq 1 \right\}$$

将此中心对称多胞体记为  $Z = \mathbf{p} \oplus H\mathbf{B}^m$ , 其中  $\oplus$  为闵可夫斯基和,  $H = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_m] \in \mathbf{R}^{n \times m}$

称为  $Z$  的生成矩阵. 为了简化符号, 用  $Z = \langle \mathbf{p}, H \rangle$  描述中心对称多胞体  $Z$ .

**性质 1.** 若给定两个中心对称多胞体, 则它们的闵可夫斯基和也是一个中心对称多胞体, 并具有如下定义, 若  $Z_1 = \mathbf{p}_1 \oplus H_1\mathbf{B}^{m_1}$  和  $Z_2 = \mathbf{p}_2 \oplus H_2\mathbf{B}^{m_2}$ , 则

$$Z = Z_1 \oplus Z_2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \oplus [H_1 \ H_2]\mathbf{B}^{m_1+m_2}.$$

**性质 2.** 对于一个中心对称多胞体满足  $Z = \mathbf{p} \oplus H\mathbf{B}^m$ , 则其通过线性映射矩阵  $K$  后生成的映射为一个具有如下形式的矩阵积, 表示为如下形式:

$$K \odot Z = K \odot \langle \mathbf{p}, H \rangle = \langle K\mathbf{p}, KH \rangle.$$

其中,  $\odot$  表示线性映射运算符号.

根据定义 2, 对于离散系统 (5) 中的系统初始参量、输入变量、系统故障  $i$  及未知干扰对应的中心对称多胞体可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(0) \in Z_x(0) = \langle \mathbf{p}_x(0), H_x(0) \rangle \\ \mathbf{u} \in Z_u = \langle \mathbf{p}_u, H_u \rangle \\ \mathbf{f}_i \in Z_{f_i} = \langle \mathbf{p}_{f_i}, H_{f_i} \rangle \\ \mathbf{w} \in Z_w = \langle \mathbf{p}_w, H_w \rangle \\ \mathbf{v} \in Z_v = \langle \mathbf{p}_v, H_v \rangle \end{cases}$$

根据性质 1 和性质 2, 可得到如下所示的发生故障  $i$  时系统状态和输出两个基本过程的中心对称多胞体的传播过程为

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{x_i}(k+1) &= A\mathbf{p}_x(k) + B\mathbf{p}_u(k) + B_{f_i}\mathbf{p}_{f_i}(k) + B_w\mathbf{p}_w(k) \\ H_{x_i}(k+1) &= [AH_x(k) \ BH_u(k) \ B_{f_i}H_{f_i}(k) \ B_wH_w(k)] \\ \mathbf{x}_i(k+1) &\in Z_{x_i}(k+1) = \langle \mathbf{p}_{x_i}(k+1), H_{x_i}(k+1) \rangle \\ \mathbf{p}_{y_i}(k) &= C\mathbf{p}_{x_i}(k) + D\mathbf{p}_u(k) + D_{f_i}\mathbf{p}_{f_i}(k) + D_v\mathbf{p}_v(k) \\ H_{y_i}(k) &= [CH_{x_i}(k) \ DH_u(k) \ D_{f_i}H_{f_i}(k) \ D_vH_v(k)] \\ \mathbf{y}_i(k) &\in Z_{y_i}(k) = \langle \mathbf{p}_{y_i}(k), H_{y_i}(k) \rangle \end{aligned}$$

由此可以得到各个故障模式下系统输出的中心对称多胞体集合. 需要说明的是, 由于不同的故障模式可能会对系统输出造成相同影响, 所以不同的故障模式下系统输出的中心对称多胞体集合可能会存在交集, 交集部分占比越大也就意味着系统的故障可分离性越低, 反之, 系统故障可分离性越高.

## 2.2 评价指标和算法

直接利用中心对称多胞体集合量化不同的故障模式下系统输出交集大小比较困难, 故考虑到中心对称多胞体是一种特殊类型的凸多面体, 每一个中心对称多胞体都可以精确的对应一个多面体表示. 所以可以将系统输出的中心对称多胞体转化为一个

多面体的表示形式, 从而衡量系统输出的不确定性边界的交集大小. 这种由中心对称多胞体转化为多面体的半空间表示的方法由以下引理给出:

**引理 2**<sup>[34]</sup>. 对于给定的一个中心对称多胞体  $Z = \langle \mathbf{p}, H \rangle$ , 则其对应的多面体的半空间表示  $P \times x \leq \mathbf{b}$  为

$$P = \begin{bmatrix} P^+ \\ -P^+ \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^+ \\ \mathbf{b}^- \end{bmatrix}$$

其中,

$$P_l^+ = \frac{\Theta(\mathbb{H})^T}{\|\Theta(\mathbb{H})\|_2}, \quad l = 1, \dots, \binom{m}{n-1}$$

$$\Theta(H) = [\dots, (-1)^{h+1}|H_{[h]}|, \dots]^T, \quad h = 1, \dots, n$$

$$b_l^+ = P_l^+ \times \mathbf{p} + \Delta b_l, \quad b_l^- = -P_l^+ \times \mathbf{p} + \Delta b_l$$

$$\Delta b_l = |P_l^+ \times \mathbf{h}_l|$$

其中,  $\mathbb{H}$  代表从矩阵  $H$  中取出  $m - n + 1$  个矢量后组成的矩阵,  $P_l^+$  表示  $P^+$  的第  $l$  行,  $b_l$  表示  $\mathbf{b}$  中的第  $l$  个元素. 为简化符号表示, 后文将此过程记为  $P = \text{polytope}([P^+; -P^+], [\mathbf{b}^+; \mathbf{b}^-])$ .

根据引理 2, 可得故障  $i$  模式对应的系统输出多面体半空间表示为

$$P_i = \{z \in \mathbf{R}^n | P_i \times z \leq \mathbf{b}_i\} \quad (7)$$

其中, 下角标  $(\cdot)_i$  代表故障  $i$  模式下对应的系统输出项的多面体半空间表示.

将系统输出的中心对称多胞体转换为多面体半空间表示法后, 通过求取相应多面体体积对交集占比进行量化, 从而实现故障可分离性的量化评价. 由多面体半空间表示可得到多面体在半空间内的有限交点集合<sup>[35]</sup>. 将这些具有交点的多面体定义为有限点集的凸包  $n$  维欧几里得空间, 这些点称为顶点, 用  $v^{(i)} \in \mathbf{R}^n$  表示. 对于  $r$  个满足  $v^{(i)} \in \mathbf{R}^n$  的顶点, 凸多面体可等价的由  $\mathcal{P}_{y_i} = \text{Conv}(v^{(1)}, \dots, v^{(i)}) = \text{Conv}(\mathcal{V})$  顶点集合表示. 将凸多面体转化为顶点集合表示后, 相应每个多面体区域都有一个适当的分解, 采用适当分解方法并利用平行四边形的体积公式, 即可直接得到多面体体积公式<sup>[36]</sup>

$$V = \text{volume}(\mathcal{P}_i) = \text{volume}(\text{Conv}(\mathcal{V})) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq k} \sqrt{|(V^{j_1}, \dots, V^{j_r})^T (V^{j_1}, \dots, V^{j_r})|} \quad (8)$$

由此, 引入系统故障可分离性评价指标

$$M_{ij} = \frac{V_{ij}}{V_i + V_j - V_{ij}} \quad (9)$$

其中,  $M_{ij}$  表示故障  $f_i$  与故障  $f_j$  的可分离性评价参数指标,  $V_i$  和  $V_j$  分别表示故障  $f_i$  模式与故障  $f_j$  模式下系统输出的对应的多面体的半空间体积,  $V_{ij}$  表

示两故障模式下系统输出多面体的半空间交集体积.

故障可分离性具体量化评价准则为: 若两个故障模式下系统输出没有交集, 则说明该系统两故障模式可以完全分离; 否则, 说明两故障模式会对系统输出造成相同的影响, 交集范围代表对系统输出影响相同的部分, 系统输出交集范围越大, 则故障间耦合程度越高, 表明故障可分离性越低. 即  $M_{ij}$  数值越大, 两故障之间可分离性越低, 反之, 两故障之间可分离性越高.

根据上述评价思想, 下面给出基于中心对称多胞体的故障可分离性评价算法.

**算法 1.** 基于中心对称多胞体可分离性评价算法

**Input:**  $u, \bar{w}, \bar{v}, s, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_q$ .

**Output:**  $M_{ij}$ .

- 1) for  $\alpha = 1 : q$  do
- 2)     for  $k = 1 : s$  do
- 3)          $Z_{x_\alpha}(k+1) = AZ_{x_\alpha}(k) + B_u Z_u(k) + B_{f_\alpha} Z_{f_\alpha}(k) + B_w Z_w(k);$   
 $Z_{y_\alpha}(k) = CZ_{x_\alpha}(k) + D_u Z_u(k) + D_{f_\alpha} Z_{f_\alpha}(k) + D_v Z_v(k);$
- 4)     end for
- 5)     for  $h = 1 : n$  do
- 6)          $\Theta(H) = [\dots, (-1)^{h+1}|H_{[h]}|, \dots]^T;$
- 7)     end for
- 8)     for  $l = 1 : C_m^{n-1}$  do
- 9)          $P_l^+ = \Theta(\mathbb{H})^T / \|\Theta(\mathbb{H})\|_2; \Delta b_l = |P_l^+ \mathbf{h}_l|;$   
 $b_l^+ = \Delta b_l + (P_l^+ \mathbf{p}); b_l^- = \Delta b_l - (P_l^+ \mathbf{p});$
- 10)     end for
- 11)      $\mathcal{P}_\alpha = \text{polytope}([P^+; -P^+], [\mathbf{b}^+; \mathbf{b}^-]);$
- 12)      $V_\alpha = \text{volume}(\mathcal{P}_\alpha);$
- 13) end for
- 14) for  $i = 1 : q$  do
- 15)     for  $j = 1 : q$  do
- 16)          $\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j;$
- 17)          $V_{ij} = \text{volume}(\mathcal{P}_{ij});$
- 18)          $M_{ij} = V_{ij} / (V_i + V_j - V_{ij});$
- 19)     end for
- 20) end for

由以上评价原理可以看出, 本文提出的评价方法不依赖于空间映射关系, 故不会造成由于映射矩阵参数不同而导致结果不同的情况发生. 实际上, 基于中心对称多胞体的分析方法中不包含需要人为选择的参数, 在某一具体时刻, 评价过程的各个计算参数均具有确定性, 不会受到时间窗口长度的影响, 故在同样的时间窗口长度条件下, 不会存在对

相同两组故障多次试验仿真结果不同一的问题.

在此需要强调的是, 由于该方法需要采用中心对称多胞体表述出系统输出的不确定性边界, 故在建立系统数学模型过程中需要明确系统的不确定性范围, 若无法确定系统的不确定性范围, 则无法利用中心对称多胞体对故障可分离性进行评价.

至此, 给出了基于中心对称多胞体的故障可分离性评价方法的一套完整体系.

### 3 数值仿真结果

#### 3.1 仿真参数

本节以系统 (5) 所示的数学模型为例, 采用包含故障以及未知输入干扰的离散系统证明本文所提方法的正确性和有效性. 初始系统状态设为  $\boldsymbol{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ , 令系统输入  $\boldsymbol{u}(k) = 0$ . 系统的相关系数矩阵取值如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 1.0 & 0 \\ 0.0389 & 0.34 & 0.15 & 0 \\ -0.04 & 0.047 & 0.21 & 0 \\ 0 & -0.11 & 0.005 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.0872 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0 & 0.0091 & 1.0 \\ 1.0 & 1.0 & 0.0002 & 1.0 \\ 0 & 1.0 & 1.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1.0 \\ -0.4792 & 0 \\ 0.3994 & 0.35 \\ -0.1597 & 0.52 \end{bmatrix}, \quad D_v^T = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.35 \\ 0.05 & 0 \\ 0.46 & 0 \\ -0.24 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$D_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#### 3.2 仿真结果

分别采用文献 [27] 所述基于方向相似度的评价方法和本文所提基于中心对称多胞体的评价方法, 对系统 (5) 所示的数学模型采用上述仿真参数, 对故障可分离性进行量化评价. 假设系统执行器发生故障, 传感器无故障, 故用  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 表示系统第  $i$  个执行器发生故障.

采用方向相似度的方法不考虑故障向量 (评价指标如式 (4) 所示), 故无需给定故障向量  $\boldsymbol{f}(k)$ . 由于该方法仅能解决一类不考虑未知输入干扰项或未知输入干扰项的分布形式已知的系统故障可分离性问题, 故我们假设不考虑未知输入干扰项  $\boldsymbol{w}(k)$  和  $\boldsymbol{v}(k)$  的影响. 为保证评价结果的正确性, 选取时间窗口长度  $s = 500$ , 评价结果如表 4 所示. 因故障本身不存在分离的可能, 所以故障本身的可分离性用 NULL 表示.

表 4 基于方向相似度可分离性评价结果 ( $s = 500$ )  
Table 4 Fault isolability evaluation results based on directional similarity ( $s = 500$ )

故障	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$f_1$	NULL	1.0000	0.9236	0.4780
$f_2$	1.0000	NULL	0.9236	0.4780
$f_3$	0.9236	0.9236	NULL	0.6411
$f_4$	0.4780	0.4780	0.6411	NULL

从表 4 中可以看出: 1) 不同故障模式之间可分离性评价结果数值不同. 故障  $f_1$  与  $f_2$  之间完全不可分离, 故障可分离性评价结果为 1.0000; 故障  $f_1/f_2$  与  $f_4$  之间最容易被分离, 故障可分离性评价结果为 0.4780. 2) 故障可分离性结果是对称的, 即  $f_i$  与  $f_j$  之间和  $f_j$  与  $f_i$  之间的可分离性一致. 3) 可分离性由高到低的排序为:  $f_1 f_4 = f_2 f_4 > f_3 f_4 > f_1 f_3 = f_2 f_3 > f_1 f_2$ .

运用中心对称多胞体的方法考虑故障向量  $\boldsymbol{f}(k)$  的影响, 假设系统执行器故障发生在幅值有界范围内, 即  $|\boldsymbol{f}_a(k)| \leq \bar{\boldsymbol{f}}$ , 且  $\bar{\boldsymbol{f}} = 1$ . 同时该方法考虑了未知输入干扰项对系统输出的影响, 但无需知晓其具体分布形式, 仅需给出上下界即可, 故我们假设  $|\boldsymbol{w}(k)| \leq \bar{\boldsymbol{w}}$ ,  $|\boldsymbol{v}(k)| \leq \bar{\boldsymbol{v}}$ , 其中  $\bar{\boldsymbol{w}} = 0.1$ ,  $\bar{\boldsymbol{v}} = 0.05$ . 同样地选取时间窗口长度  $s = 500$ , 结果如表 5 所示.

表 5 给出了本文所提方法的可分离性量化评价结果, 从表 5 可以发现: 1) 故障  $f_1$  与  $f_2$  之间完全不可分离, 可分离性评价结果为 1.0000. 其他故障模式之间可以被分离, 可分离性大小各不相同. 2) 故障可分离性结果依旧是对称的. 3) 各个故障模式之

表 5 基于中心对称多胞体可分离性评价结果 ( $s = 500$ )  
Table 5 Fault isolability evaluation results based on Zonotope ( $s = 500$ )

故障	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$f_1$	NULL	1.0000	0.4464	0.1508
$f_2$	1.0000	NULL	0.4463	0.1508
$f_3$	0.4463	0.4463	NULL	0.3380
$f_4$	0.1508	0.1508	0.3380	NULL

间的可分离性由高到低的排序为:  $f_1 f_4 = f_2 f_4 > f_3 f_4 > f_1 f_3 = f_2 f_3 > f_1 f_2$ , 结果同表 4 一致。

在此需要说明的是: 上述两种方法所得评价结果数值不同是由于两种方法的评价思想和评价公式均不相同, 同时在上述仿真中, 采用基于方向相似度的方法未对故障向量和干扰项加以考虑, 而采用本文所述方法考虑了故障向量, 同时考虑了分布形式未知而上下界已知的输入干扰对系统输出的影响, 这使得评价结果的相关数值之间不具有可比性。但是, 由于系统故障可分离性是客观存在的, 我们可以通过数值的大小排序来评判系统可分离性评价指标是否正确。从这一点上来说, 上述两种方法所得的可分离性评价结果是一致的。同时, 在上述仿真中, 本文所提方法考虑的影响因素更多, 故其可分离性评价结果的相对数值更具参考性。从而, 验证了基于中心对称多胞体方法的正确性和有效性。

为进一步验证本方法在短时间窗口长条件下, 依然可以有效实现故障可分离性评价, 弥补基于方向相似度方法的不足, 我们仍采用上述仿真参数, 选用一个短时间窗口长度  $s = 5$ , 对系统 (5) 进行仿真, 结果如表 6 所示。

从表 6 中结果可以发现, 各个故障模式之间的可分离性评价结果与表 5 是存在差异的, 这是由于系统是随着时间而不断发生变化的, 不同时刻下系统输出的中心对称多胞体包络必然是不同的, 同时两故障模式之间输出的中心对称多胞体交集大小也是随着时间不断变化的, 故选取不同时间窗口长度, 得到的可分离性评价结果也不同。但对于完全不可分离的故障  $f_1$  和  $f_2$ , 其可分离性评价结果仍为 1.0000, 各个故障模式之间的可分离性由高到低的排序仍为:  $f_1 f_4 = f_2 f_4 > f_3 f_4 > f_1 f_3 = f_2 f_3 > f_1 f_2$ , 结果与表 4 和表 5 一致, 由此证明了结果的正确性。

同时, 相较于基于方向相似度的方法中, 相同系统、同一参数在短时间窗口长度条件下, 相同两故障模式之间多次仿真实验的可分离性评价结果不同一的问题, 本文所提的分析方法是确定性的算法, 不包含需要人为选择的参数, 所以在评价过程中的

表 6 基于中心对称多胞体可分离性评价结果 ( $s = 5$ )  
Table 6 Fault isolability evaluation results based on Zonotope ( $s = 5$ )

故障	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$f_1$	NULL	1.0000	0.3665	0.2961
$f_2$	1.0000	NULL	0.3665	0.2961
$f_3$	0.3665	0.3665	NULL	0.3645
$f_4$	0.2961	0.2961	0.3645	NULL

各个计算参数均具有确定性。故对于相同两故障模式, 即使选取了较短的时间窗口长度进行重复仿真实验, 结果仍然为稳定的数值, 这说明短时间窗口长度下该方法能够可靠地实现故障可分离性量化评价。即运用本文所提方法, 我们可以在故障发生初期即可有效地完成故障可分离性的量化评价。因此, 表明了本方法相较于文献 [27] 所述方法具有优越性。

本文所提方法是将系统输出的中心对称多胞体转化为多面体的表示形式, 计算不同故障模式下系统输出相应多面体交集的体积占比, 为了更直观表示各个故障模式的可分离性大小, 图 1 给出了  $s = 5$  时, 上述系统输出的多面体图形表示。图形中阴影部分表示不同故障模式可能对系统输出造成的相同影响, 即系统输出的中心对称多胞体的交集范围, 交集部分越大表示相应故障可分离性越低。

## 4 结论与展望

本文针对线性离散系统故障可分离性评价开展了相关研究, 提出了一种基于中心对称多胞体的可分离性量化评价新方法。本文首先以方向相似度为可分离性量化指标, 研究了该方法在实际应用中存在的不足。为弥补上述不足之处, 本文推导了以中心对称多胞体为评价指标的可分离性评价方法, 并给出了具体指标和评价算法。最后通过仿真算例的对比, 验证了本文所提评价指标的正确性和有效性, 同时证明了基于中心对称多胞体在实际应用中具备的优越性。

综上, 本文所提出的方法主要优势在于: 针对一类包含未知输入干扰项的线性离散系统, 在仅已知故障及干扰的上下界、未知其具体分布形式的情况下, 在故障发生初期即可有效完成故障可分离性评价, 不会受到时间窗口长度大小的限制。

故障可诊断性的分析与评价方法是一个很有实际意义的研究方向, 但是目前的研究还处于起步阶段, 本文只研究了线性定常系统的故障可分离性评价方法, 如何将本文所提出的方法推广到更具一般



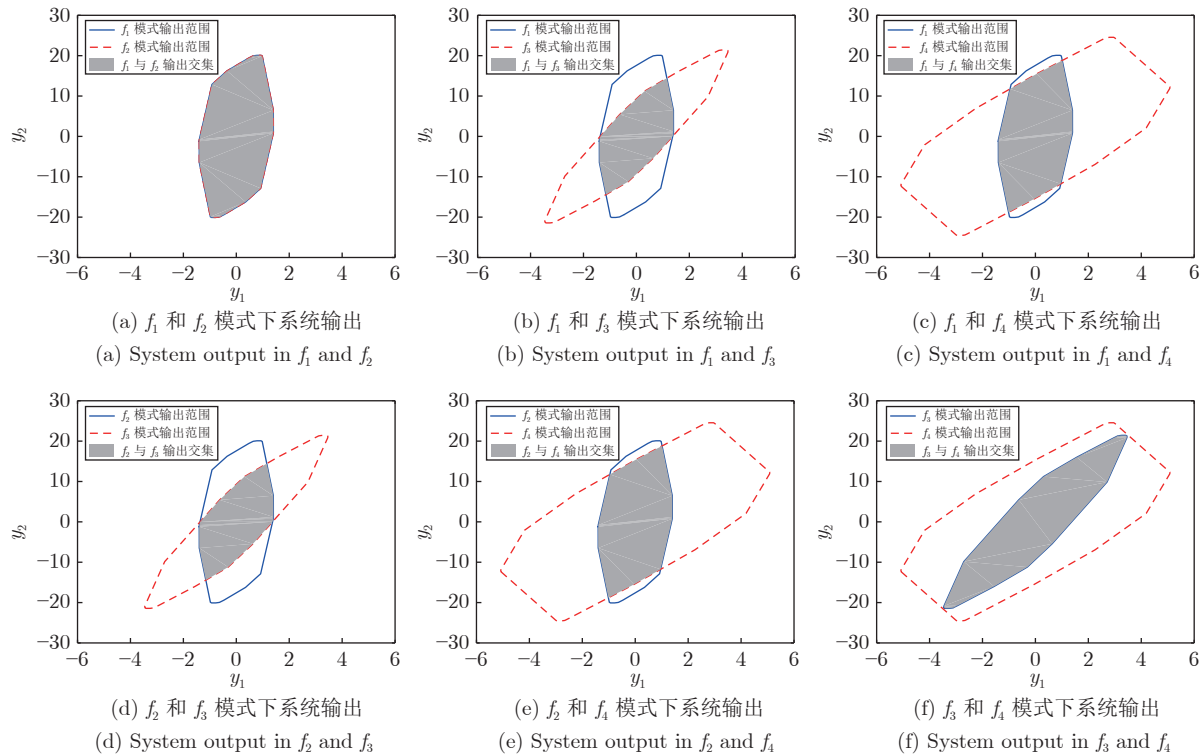


图 1 各个故障模式组合下系统输出结果

Fig.1 System output results under the combination of various fault modes

性的非线性系统中, 是下一步的研究方向之一。

## References

- Chen J, Patton R J. *Robust Model-based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. New York: Springer, 2012.
- Wang Z H, Shi P, Lim C C.  $H_2/H_\infty$  fault detection observer in finite frequency domain for linear parameter-varying descriptor systems. *Automatica*, 2017, **86**: 38–45
- Tang Wen-Tao, Wang Zhen-Hua, Wang Ye, Shen Yi. Fault diagnosis for uncertain systems based on unknown input set-membership filters. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(9): 1717–1724 (汤文涛, 王振华, 王烨, 沈毅. 基于未知输入集员滤波器的不确定系统故障诊断. *自动化学报*, 2018, **44**(9): 1717–1724)
- Zhang Ke, Jiang Bin. Fault diagnosis observer-based output feedback fault tolerant control design. *Acta Automatica Sinica*, 2010, **36**(2): 274–281 (张柯, 姜斌. 基于故障诊断观测器的输出反馈容错控制设计. *自动化学报*, 2010, **36**(2): 274–281)
- Feng Jian-Wen, Sun Li, Liu Jin-Long. Brief analysis of the Boeing 737-8 crashes. *Aerospace Power*, 2019, (2): 50–55 (冯建文, 孙黎, 刘金龙. 波音737-8事故简析. *航空动力*, 2019, (2): 50–55)
- Zhou Dong-Hua, Liu Yang, He Xiao. Review on fault diagnosis techniques for closed-loop systems. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(11): 1933–1943 (周东华, 刘洋, 何潇. 闭环系统故障诊断技术综述. *自动化学报*, 2013, **39**(11): 1933–1943)
- Zhang J C, Zhu F L, Karimi H R, Wang F N. Observer-based sliding mode control for T-S fuzzy descriptor systems with time delay. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2019, **27**(10): 2009–2023
- Wang Da-Yi, Fu Fang-Zhou, Liu Cheng-Rui, Li Wen-Bo, Liu Wen-Jing, He Ying-Zi, et al. Connotation and research status of diagnosability of control systems: A review. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(9): 1537–1553 (王大轶, 符方舟, 刘成瑞, 李文博, 刘文静, 何英姿, 等. 控制系统可诊断性的内涵与研究综述. *自动化学报*, 2018, **44**(9): 1537–1553)
- Han W X, Wang Z H, Shen Y.  $H_2/L_\infty$  fault detection observer for linear parameter-varying systems with parametric uncertainty. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, **29**(10): 2912–2926
- Li X H, Zhu F L, Xu L Y. Actuator and sensor fault reconstructions for uncertain Lipschitz nonlinear systems based on  $H_\infty$  observers. *Asian Journal of Control*, 2015, **17**(6): 2206–2217
- Zhang Wen-Han, Wang Zhen-Hua, Shen Yi. Interval estimation for sensor fault based on robust positive invariant set. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(9): 1986–1993 (张文瀚, 王振华, 沈毅. 基于鲁棒正不变集的传感器故障区间估计. *自动化学报*, 2020, **46**(9): 1986–1993)
- Tang W T, Wang Z H, Shen Y. Fault detection and isolation for discrete-time descriptor systems based on  $H_2/L_\infty$  observer and zonotopic residual evaluation. *International Journal of Control*, 2020, **93**(8): 1867–1878
- Wang Z H, Shen Y, Zhang X L. Actuator fault estimation for a class of nonlinear descriptor systems. *International Journal of Systems Science*, 2014, **45**(3): 487–496
- IEEE STD 1522–2004. IEEE TrialUse Standard for Testability and Diagnosability Characteristics and Metrics. Piscataway, NJ: IEEE Standards Press, 2004.
- Guo Qi-Yi, Huang Shi-Ze. Study on the condition of separable fault of serial nonlinear system under the process noise. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2017, **45**(8): 1183–1190 (郭其一, 黄世泽. 非线性系统存在过程扰动时故障可分离研究. *同济大学学报(自然科学版)*, 2017, **45**(8): 1183–1190)
- Jiang Bin, Mao Ze-Hui, Yang Hao, Zhang You-Min. *Fault Diagnosis and Fault Accommodation for Control Systems*. Beijing:

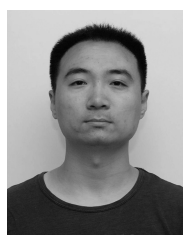
- National Defense Industry Press, 2009. 1–6  
(姜斌, 冒泽慧, 杨浩, 张友民. 控制系统的故障诊断与故障调节. 北京: 国防工业出版社, 2009. 1–6)
- 17 Li Han, Xiao De-Yun. Survey on data driven fault diagnosis methods. *Control and Decision*, 2011, **26**(1): 1–9  
(李晗, 萧德云. 基于数据驱动的故障诊断方法综述. 控制与决策, 2011, **26**(1): 1–9)
- 18 Yue H H, Qin S J. Reconstruction-based fault identification using a combined index. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, 2001, **40**(20): 4403–4414
- 19 Hua Y Z, Li Q D, Ren Z, Liu C R. A data driven method for quantitative fault diagnosability evaluation. In: Proceedings of the 2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC). Yinchuan, China: IEEE, 2016. 1890–1894
- 20 Zhang K, Jiang B, Shi P. *Observer-based Fault Estimation and Accomodation for Dynamic Systems*. Berlin: Springer, 2013.
- 21 Zhong M Y, Song Y, Ding S X. Parity space-based fault detection for linear discrete time-varying systems with unknown input. *Automatica*, 2015, **59**: 120–126
- 22 Zhang X M, Zhu F L, Guo S H. Actuator fault detection for uncertain systems based on the combination of the interval observer and asymptotical reduced-order observer. *International Journal of Control*, 2020, **93**(11): 2653–2661
- 23 Li Yue-Yang, Zhong Mai-Ying. Fault detection filter design for linear discrete time-varying systems with multiple packet dropouts. *Acta Automatica Sinica*, 2015, **41**(9): 1638–1648  
(李岳扬, 钟麦英. 具有多测量数据包丢失的线性离散时变系统故障检测滤波器设计. 自动化学报, 2015, **41**(9): 1638–1648)
- 24 Eguchi S, Copas J. Interpreting Kullback-Leibler divergence with the Neyman-Pearson lemma. *Journal of Multivariate Analysis*, 2006, **97**(9): 2034–2040
- 25 Eriksson D, Frisk E, Krysander M. A method for quantitative fault diagnosability analysis of stochastic linear descriptor models. *Automatica*, 2013, **49**(6): 1591–1600
- 26 Jiang Dong-Nian, Li Wei, Wang Jun, Sun Xiao-Jing. Research on sensor optimal placement method using quantitative evaluation of fault diagnosability. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(6): 1128–1137  
(蒋栋年, 李炜, 王君, 孙晓静. 基于故障可诊断性量化评价的传感器优化配置方法研究. 自动化学报, 2018, **44**(6): 1128–1137)
- 27 Li W B, Wang D Y, Liu C R. Fault diagnosability evaluation for spacecraft control systems via direction similarity. *Chinese Control Conference*. In: Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference. Nanjing, China: IEEE, 2014. 3191–3196
- 28 Shen Q K, Jiang B, Shi P. Active fault-tolerant control against actuator fault and performance analysis of the effect of time delay due to fault diagnosis. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2017, **15**(2): 537–546
- 29 Ben-Israel A, Greville T N E. *Generalized Inverses: Theory and Applications* (2nd edition). New York: Springer, 2003.
- 30 Cramér H. *Mathematical Methods of Statistics (Volume 43)*. Princeton University, USA press, 1999.
- 31 Li Ji-Tao, Wang Zhen-Hua, Shen Yi. Set-membership fault detection observer design in finite-frequency domain for linear discrete-time system. *Acta Automatica Sinica*, 2020, **46**(7): 1531–1538  
(李佶桃, 王振华, 沈毅. 线性离散系统的有限频域集员故障检测观测器设计. 自动化学报, 2020, **46**(7): 1531–1538)
- 32 Combastel C. An extended zonotopic and Gaussian Kalman filter (EZGKF) merging set-membership and stochastic paradigms: Toward non-linear filtering and fault detection. *Annual Reviews in Control*, 2016, **42**: 232–243
- 33 Combastel C. Zonotopes and Kalman observers: Gain optimality under distinct uncertainty paradigms and robust convergence. *Automatica*, 2015, **55**: 265–273
- 34 Althoff M, Stursberg O, Buss M. Computing reachable sets of hybrid systems using a combination of zonotopes and polytopes. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2010, **4**(2): 233–249
- 35 Ziegler G M. *Lectures on Polytopes*. New York: Lectures on Polytopes, 1995.
- 36 Gover E, Krikorian N. Determinants and the volumes of parallelotopes and zonotopes. *Linear Algebra and Its Applications*, 2010, **433**(1): 28–40



王桢榕 哈尔滨工业大学航天学院硕士研究生. 主要研究方向为基于模型的故障诊断.

E-mail: arong\_wang@163.com

(WANG Zhen-Rong Master student at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology. Her main research interest is model-based fault diagnosis.)



王振华 哈尔滨工业大学航天学院副教授. 主要研究方向为故障诊断与容错控制技术.

E-mail: zhenhua.wang@hit.edu.cn

(WANG Zhen-Hua Associate professor at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology. His

research interest covers fault diagnosis and fault-tolerant control.)



沈毅 哈尔滨工业大学航天学院教授. 主要研究方向为故障诊断, 飞行器控制, 超声信号处理. 本文通信作者. E-mail: shen@hit.edu.cn

(SHEN Yi Professor at the School of Astronautics, Harbin Institute of Technology. His research interest

covers fault diagnosis, flight vehicle control, and ultrasound signal processing. Corresponding author of this paper.)