

基于背景值和结构相容性改进的多维灰色预测模型

缪燕子¹ 王志铭¹ 李守军² 代伟¹

摘要 现有的多变量灰色预测模型的背景值估计误差及模型结构单一是导致该模型预测性能不稳定的重要因素, 致使该模型在实际预测领域中应用并不广泛. 本文通过分析背景值函数的几何意义, 结合积分几何面积公式, 提出一种改进的背景值优化方法, 使预测模型在背景值系数的选取上更加灵活. 在此基础上, 模型中加入灰色作用量, 提出一种改进背景值及结构相容性的多维灰色预测模型 (Improved background value and structure compatibility of grey prediction model, IBSGM(1, N)). 通过对模型参数的改变分析, 新模型理论上可达到与传统单变量和多变量灰色预测模型的兼容性. 为检验新模型的性能, 本文进行了三个案例对比分析, 实验结果表明, 与现有的灰色预测模型 (Grey model, GM) GM(1, 1) 和 GM(1, N) 相比较, 所提出的 IBSGM(1, N) 模型在背景值参数估计上误差明显减小, 结构相容性更强, 泛化性能更好, 具有更高的预测精度.

关键词 背景值优化, 结构相容性, 多维灰色预测模型, IBSGM(1, N)

引用格式 缪燕子, 王志铭, 李守军, 代伟. 基于背景值和结构相容性改进的多维灰色预测模型. 自动化学报, 2022, 48(4): 1079–1090

DOI 10.16383/j.aas.c200780

Improved Multi-dimensional Grey Prediction Model Based on Background Value and Structural Compatibility

MIAO Yan-Zi¹ WANG Zhi-Ming¹ LI Shou-Jun² DAI Wei¹

Abstract The background value estimation error of the existing multivariate gray prediction model and the single model structure are important factors that lead to the unstable prediction performance of the model. Therefore, the model is not widely used in the actual prediction field. In this paper, by analyzing the geometric meaning of the background value function, combined with the integral geometric area formula, an improved background value optimization method is proposed to make the prediction model more flexible in the selection of background value coefficients. On this basis, the gray effect is added to the model, and a new multi-dimensional gray prediction model called improved background value and structure compatibility of grey prediction model (IBSGM(1, N)) is proposed. Through the analysis of the change of model parameters, the new model can theoretically achieve compatibility with traditional univariate and multivariate gray prediction models. In order to test the performance of the new model, this paper conducts a comparative analysis of three cases. The experimental results show that compared with the existing grey prediction model (GM) GM(1, 1) and GM(1, N), the proposed IBSGM(1, N) model has significantly reduced error in background parameter estimation, stronger structural compatibility, better generalization performance, and higher prediction accuracy.

Key words Background value optimization, structural compatibility, multi-dimensional grey prediction model, IBSGM(1, N)

Citation Miao Yan-Zi, Wang Zhi-Ming, Li Shou-Jun, Dai Wei. Improved multi-dimensional grey prediction model based on background value and structural compatibility. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(4): 1079–1090

收稿日期 2020-09-21 录用日期 2020-12-31

Manuscript received September 21, 2020; accepted December 31, 2020

国家重点研发计划重点专项 (2018YFC0808100), 国家自然科学基金 (61976218, 61973306), 江苏省高等学校自然科学研究项目 (19KJB440002), 江苏省自然科学基金 (BK20200086), 中央高校基本科研业务费专项资金资助 (2020ZDPY0303) 资助

Supported by Project of National Key Research and Development Project (2018YFC0808100), National Natural Science Foundation of China (61976218, 61973306), Natural Science Research Project of Higher Education Institutions in Jiangsu Province (19KJB440002), Natural Science Foundation of Jiangsu Provinces (BK20200086), Fundamental Research Fund for the Central Universities (2020ZDPY0303)

本文责任编辑 吕宜生

Recommended by Associate Editor LV Yi-Sheng

灰色预测模型 (Grey model, GM) 是灰色系统理论的基础和核心内容, 其研究重点在于解决小样本、贫信息的不确定性问题, 且灰色预测模型在众多领域都得到了广泛的运用^[1]. GM(1, 1) 模型是灰色预测的核心内容, 是最简单、应用最广泛的单变量灰色预测模型. 但 GM(1, 1) 模型只包含一个因

1. 中国矿业大学信息与控制工程学院 徐州 221116 2. 宿迁学院机电工程学院 宿迁 223800

1. School of Information and Control Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116 2. School of Mechanical and Electrical Engineering of Suqian College, Suqian 223800

变量, 不考虑外部其他因素对系统发展的影响, 大量研究表明 GM(1, 1) 模型的性能不够稳定, 模拟精度不理想^[2-5]. 因此提出了一种具有一个因变量和 $N-1$ 个相关因素变量的多维灰色预测 GM(1, N) 模型^[6]. 但传统的 GM(1, N) 模型由于背景值表达式构造的不精确, 导致模型预测误差较大, 且当取 $N=1$ 时, 其不能转化为对应的 GM(1, 1) 模型, 说明传统的 GM(1, N) 与 GM(1, 1) 模型在结构上是不相容的^[7]. 因此, 在某些情况下 GM(1, N) 模型的预测精度甚至会低于 GM(1, 1) 模型. 在考虑多变量预测的同时, 为了提高 GM(1, N) 模型的预测精度, 国内外学者针对模型的结构、参数优化、背景值的优化等方面进行了相关研究分析^[8-9].

针对背景值优化的问题, 主要有插值法和拟合法等改进措施. 为提高预测精度, 文献 [10] 通过 Goldfeld-Quandt 检验区分 GM(1, 1) 模型的异方差性, 并采用插值法对背景值进行了优化, 以此最小化原始序列平方误差之和的函数来构建其模型; 文献 [11] 利用一次累加具有非齐次灰指数规律, 构建动态序列模型, 从积分几何意义的视角, 利用函数逼近的思想, 结合复化梯形公式改进模型背景值; 文献 [12] 提出了一种优化背景值和调整初始系统参数的组合优化方法, 通过优化灰色微分方程中的背景值来模拟和预测无偏指数分布的序列; 文献 [13] 提出一种寻找模型平均拟合误差 (ARPE) 最小值的方法, 采用粒子群优化算法对模型背景值系数进行优化, 当 ARPE 最小时的背景值系数取值即是模型的最优解, 但其优化是针对传统背景值表达式, 在背景值表达式构造上仍存在一定误差.

针对模型结构缺陷问题, 主要有基于智能算法的结构选择及参数和结构融合优化等方法. 文献 [14-16] 对初始条件、累加生成顺序、发展系数和背景值分布系数进行了参数优化, 研究结果表明上述参数的优化对提高多维灰色预测模型的性能有积极的作用, 但当 $N=1$ 时, GM(1, N) 模型仍然不能等价于 GM(1, 1) 模型, 意味着这些改进的灰色预测模型在结构相容性上仍存在缺陷; 文献 [17] 提出了一种基于数据算法自适应选择模型结构的灰色预测模型, 称为离散灰色多项式模型, 该模型具有代表最普遍的同构和非同构离散灰色模型的能力, 并且可以归纳出一些其他新颖的模型, 从而突出了模型与其结构之间的关系; 文献 [18] 在模型中加入了相邻变量滞后项、线性校正项和随机扰动项, 其中线性校正项反映了因变量和自变量之间的线性关系, 消除了解释变量之间的多重共线性问题, 使模型的预测性能得到了显著的提高.

基于现有的文献我们发现传统 GM(1, N)、

GM(1, 1) 模型在构造背景值表达式时存在一定误差, 且模型结构单一, 从而导致模型预测精度不高, 结构相容性不强等问题. 因此, 本文对以上两个问题进行了深入研究.

首先针对模型背景值的构造方法不准确, 考虑传统模型背景值表达式固定用几何梯形面积近似方程来表示, 而现有文献中的工作亦是基于该公式对参数进行优化, 未能从根本上减小误差. 本文从背景值函数表达式的几何意义出发, 构造了一个新的背景值表达式, 并采用 MATLAB 数值分析对背景值系数的取值进行优化, 使背景值系数的取值更灵活, 减小了系统参数计算的误差, 进而提高模型的预测精度. 其次针对模型结构的缺陷, 考虑传统灰色预测模型结构单一, 结构相容性弱, 泛化性能差, 虽然现有文献中对各种系统参数及结构参数有所改进, 但仍不能使模型具有较好的结构相容性. 本文在预测模型中加入了灰色作用量, 以反映自变量数据变换关系, 改善了模型的结构相容性, 提高模型的泛化能力, 使模型预测性能得到显著提高.

本文所提的改进背景值及结构相容性的多维灰色预测模型 (Improved background value and structure compatibility of grey prediction model, IBSGM(1, N)) 解决了传统多变量灰色预测模型预测性能不稳定的问题, 该模型结构泛化能力强, 鲁棒性好, 适用于大部分多变量灰色预测系统. 同时, 本文突破了传统的模型改进思想, 有效解决了对系统参数优化的同时使模型结构泛化性提高的问题, 对多维灰色预测模型的改进方法上提供了新的思路.

1 多变量灰色预测模型及分析

灰色预测方法是一种用来对灰色系统进行预测的方法. 通过对系统因素发展趋势之间的相关性分析, 生成和处理原始数据, 以找出系统的变化规律, 生成一组有明显规律的数据序列, 并基于该数据序列建立微分方程模型, 对事物的未来发展状态进行预测.

单变量 GM(1, 1) 预测模型的基本原理是: 对某一数据序列使用累加的方法生成一组变化趋势明显的新序列, 对新的数据序列建立模型并进行预测, 然后利用累减方法逆向计算, 使其恢复为原始序列, 得出预测模型结果^[19].

多变量 GM(1, N) 预测模型的预测原理与单变量 GM(1, 1) 预测模型类似, 不同之处在于输入数据变量是 N 个.

GM(1, N) 模型的建模过程如下:

设系统有特征数据序列:

$$x_1^{(0)} = (x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \dots, x_1^{(0)}(n))$$

相关因素序列:

$$x_2^{(0)} = (x_2^{(0)}(1), x_2^{(0)}(2), \dots, x_2^{(0)}(n))$$

...

$$x_N^{(0)} = (x_N^{(0)}(1), x_N^{(0)}(2), \dots, x_N^{(0)}(n))$$

根据 $x_i^{(0)}$ ($i=1, 2, \dots, N$) 的 1-AGO 序列 $x_i^{(1)}$, 生成 $x_1^{(1)}$ 的紧邻均值数列, 并对 $x_1^{(1)}$ 建立微分方程, 当 $x_i^{(1)}$ ($i=1, 2, \dots, N$) 变化幅度较小时, 可得模型 1-AGO 序列预测值 $\hat{x}_1^{(1)}(k+1)$ [20]:

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1) = \left[x_1^{(0)}(1) - \frac{1}{a} \sum_{i=1}^N b_i x_i^{(1)}(k+1) \right] \times e^{-ak} + \frac{1}{a} \sum_{i=1}^N b_i x_i^{(1)}(k+1) \quad (1)$$

其中, a 为发展系数, b 为驱动系数.

累减还原解得原始序列预测值 $\hat{x}_1^{(0)}(k+1)$:

$$\hat{x}_1^{(0)}(k+1) = \hat{x}_1^{(1)}(k+1) - \hat{x}_1^{(1)}(k) \quad (2)$$

为简化建模过程, 传统 GM(1, N) 预测模型的背景值表达式固定为几何面积近似方程, 致使模型参数估计产生误差; 其次, 模型结构单一, 泛化性能不强, 导致模型预测鲁棒性较差. 因此, 本文从改进背景值表达式及模型结构方面入手, 提出一种新的多维灰色预测模型.

2 IBSGM(1, N) 多维灰色预测模型

2.1 背景值优化

根据对构建灰色 GM(1, N) 预测模型的研究发现, 参数 a 和 b 是影响模型预测精度的重要因素, 而 a 和 b 的取值取决于背景值的参数估计公式, 因此, 提高背景值表达式构造的准确性, 将直接提高模型的预测精度.

定义 1. 设 $x_1^{(0)}$ 、 $x_1^{(1)}$ 为原始序列及其对应的一阶累加序列, 令

$$Z^{(1)}(k) = [x_1^{(1)}(k)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{1-\lambda}, \lambda \in [0, 1] \quad (3)$$

称 $Z^{(1)} = \{Z^{(1)}(2), Z^{(1)}(3), \dots, Z^{(1)}(n)\}$ 为序列 $x_1^{(0)}$ 改进后的背景值序列, 式 (3) 为改进的背景值表达式, 其中参数 λ 为背景值函数的调节因子, 称为背景值系数, 且背景值系数的选取将会直接影响系统参数 a 和 b 的计算值, 进而影响模型预测性能.

定理 1. 对于给定的原始数据序列 $x_1^{(0)}$, 定义 1 所给的优化背景值表达式 (3) 存在的误差小于传统背景值表达式存在的误差. 即

$$\left| Z^{(1)}(k) - \int_{k-1}^k x_1^{(1)}(t) dt \right| < \left| Z_0^{(1)}(k) - \int_{k-1}^k x_1^{(1)}(t) dt \right| \quad (4)$$

式 (4) 中, $Z_0^{(1)}(k)$ 为传统模型背景值表达式, $Z^{(1)}(k)$ 为改进后的背景值表达式, $\int_{k-1}^k x_1^{(1)}(t) dt$ 为实际背景值.

证明. 传统灰色预测模型中的背景值表达式为:

$$Z_0^{(1)}(k) = \frac{1}{2} \cdot (x_1^{(1)}(k-1) + x_1^{(1)}(k)), k = 2, 3, \dots, n \quad (5)$$

实际背景值的几何意义应为曲线 $x_1^{(1)}(t)$ 在区间 $[k-1, k]$ 与横轴间所围成的面积, 如图 1 所示. 从图中可以看出传统模型的背景值表达式 $Z_0^{(1)}(k)$ 采用所围梯形 $abcd$ 的面积来近似表示曲线 $x_1^{(1)}(t)$ 与 x 轴的所围面积, 由此可以看出原始背景值计算公式存在一定误差.

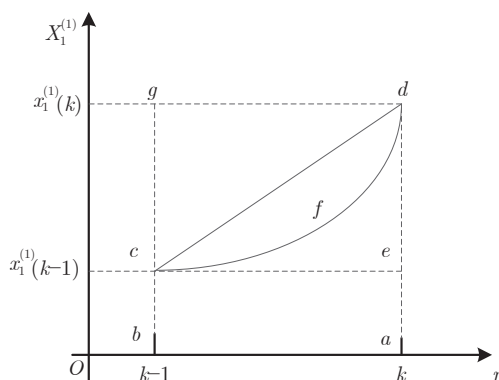


图 1 背景值几何示意图 1

Fig. 1 Schematic diagram 1 of the background value

1) 当 $x_1^{(1)}(k) > x_1^{(1)}(k-1)$ 时

此时背景值函数几何意义如图 1 所示, 由图可知, $S_{abce} = x_1^{(1)}(k-1)$, 且有 $S_{abcf d} > S_{abce}$, 因此一定存在 $m > 1$, 使得满足 $S_{abcf d} = m \cdot S_{abce}$, 因为 $x_1^{(1)}(k) > x_1^{(1)}(k-1)$, 所以有

$$\frac{x_1^{(1)}(k)}{x_1^{(1)}(k-1)} > 1 \quad (6)$$

存在 $\lambda_1 > 0$, 使得

$$\left(\frac{x_1^{(1)}(k)}{x_1^{(1)}(k-1)} \right)^{\lambda_1} > 1 \quad (7)$$

令

$$m = \left(\frac{x_1^{(1)}(k)}{x_1^{(1)}(k-1)} \right)^{\lambda_1} \quad (8)$$

代入 $S_{abcf d} = m \cdot S_{abce}$ 可得:

$$S_{abcf d} = \left(\frac{x_1^{(1)}(k)}{x_1^{(1)}(k-1)} \right)^{\lambda_1} \cdot x_1^{(1)}(k-1) \quad (9)$$

$$Z^{(1)}(k) = S_{abcf d} \quad (10)$$

即

$$Z^{(1)}(k) = [x_1^{(1)}(k)]^{\lambda_1} \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{1-\lambda_1}, \quad 0 < \lambda_1 < 1 \quad (11)$$

2) 当 $x_1^{(1)}(k) < x_1^{(1)}(k-1)$ 时

此时背景值函数几何意义如图 2 所示, 由图可知, $S_{abed} = x_1^{(1)}(k)$, 且有 $S_{abcf d} > S_{abed}$, 因此一定存在 $m > 1$, 使得满足 $S_{abcf d} = m \cdot S_{abed}$, 因为 $x_1^{(1)}(k-1) > x_1^{(1)}(k)$, 所以有

$$\frac{x_1^{(1)}(k-1)}{x_1^{(1)}(k)} > 1 \quad (12)$$

存在 $\lambda_2 > 0$, 使得

$$\left(\frac{x_1^{(1)}(k-1)}{x_1^{(1)}(k)} \right)^{\lambda_2} > 1 \quad (13)$$

令

$$m = \left(\frac{x_1^{(1)}(k-1)}{x_1^{(1)}(k)} \right)^{\lambda_2} \quad (14)$$

代入 $S_{abcf d} = m \cdot S_{abed}$ 可得:

$$S_{abcf d} = \left(\frac{x_1^{(1)}(k-1)}{x_1^{(1)}(k)} \right)^{\lambda_2} \cdot x_1^{(1)}(k) \quad (15)$$

$$Z^{(1)}(k) = S_{abcf d} \quad (16)$$

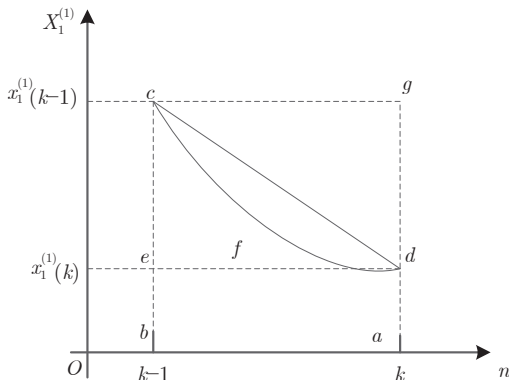


图 2 背景值几何示意图 2

Fig. 2 Schematic diagram 2 of the background value

即

$$Z^{(1)}(k) = [x_1^{(1)}(k)]^{1-\lambda_2} \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{\lambda_2}, \quad 0 < \lambda_2 < 1 \quad (17)$$

因此, 改进背景值表达式可写为:

$$Z^{(1)}(k) = [x_1^{(1)}(k)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{1-\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1 \quad (18)$$

3) 当 $x_1^{(1)}(k) = x_1^{(1)}(k-1)$ 时

曲线 $x_1^{(1)}(t)$ 在区间 $[k-1, k]$ 与横轴间所围成的面积为矩形 $abcd$ 的面积, 有

$$S_{abcd} = x_1^{(1)}(k) = x_1^{(1)}(k-1) \quad (19)$$

$$Z^{(1)}(k) = S_{abcd} \quad (20)$$

存在 $\lambda = 0$ 或 1 , 使得

$$Z^{(1)}(k) = [x_1^{(1)}(k)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{1-\lambda}, \quad \lambda = 0 \text{ 或 } 1 \quad (21)$$

综上, 改进的背景值表达式可整合为:

$$Z^{(1)}(k) = [x_1^{(1)}(k)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{1-\lambda}, \quad \lambda \in [0, 1] \quad (22)$$

□

2.2 IBSGM(1, N) 预测模型

定义 2. 设 $x_1^{(0)} = (x_1^{(0)}(1), x_1^{(0)}(2), \dots, x_1^{(0)}(n))$ 为系统的原始特征序列, 系统的相关因素序列记为 $x_i^{(0)} = (x_i^{(0)}(1), x_i^{(0)}(2), \dots, x_i^{(0)}(n)), i = 2, 3, \dots, N$, 令 $x_i^{(1)}(k)$ 为 $x_i^{(0)}(k)$ 的一阶累加生成序列, 且 $a, b_1, b_2, \dots, b_{N-1}, \gamma$ 为待定参数, 定义改进的多维灰色预测模型结构为

$$x_1^{(0)}(k) + a \times [x_1^{(1)}(k)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{1-\lambda} = \sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(k) + \gamma \quad (23)$$

称式 (23) 为改进背景值及结构相容性的多维灰色预测模型, 简称 IBSGM(1, N) 模型. 式 (23) 中第一项 $x_1^{(0)}(k)$ 为原始特征序列, 第二项中 a 为系统发展系数, $[x_1^{(1)}(k)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{1-\lambda}$ 为改进后的背景值表达式, 第三项 $\sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(k)$ 为相关因素驱动项, 第四项 γ 为灰色作用量.

式 (23) 中 $x_1^{(0)}(k)$ 为需要模拟或预测的因变量, 若要对下一时刻 $x_1^{(0)}(k+1)$ 进行预测, 需已知原始特征序列下一时刻的一阶累加 $x_1^{(1)}(k+1)$ 的值, 但

$x_1^{(1)}(k+1)$ 是未知的, 因此无法直接预测或模拟, 本文给出并证明所提出的 IBSGM(1, N) 模型的时间响应函数.

定理 2. 对于定义 2 中的 IBSGM(1, N) 模型, 时间响应函数为

$$x_1^{(1)}(k+1) = \left(x_1^{(1)}(1) - \left(\sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(k+1) + \gamma \right) / a \right) \times e^{-ak} + \left(\sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(k+1) + \gamma \right) / a, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (24)$$

证明. 根据式 (23) 有灰微分方程:

$$x_1^{(0)}(k) + a \times [x_1^{(1)}(k)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{1-\lambda} = \sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(k) + \gamma \quad (25)$$

引入矩阵向量记号:

$$u = \begin{bmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x_1^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -[x_1^{(1)}(2)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(1)]^{1-\lambda} \\ -[x_1^{(1)}(3)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(2)]^{1-\lambda} \\ \vdots \\ -[x_1^{(1)}(n)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(n-1)]^{1-\lambda} \\ x_2^{(1)}(2) \cdots x_N^{(1)}(2) \quad 1 \\ x_2^{(1)}(3) \cdots x_N^{(1)}(3) \quad 1 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad 1 \\ x_2^{(1)}(n) \cdots x_N^{(1)}(n) \quad 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

采用最小二乘法求得 $u = [a, b_1, b_2, \dots, b_N, \gamma]^T$

$$u = (B^T B)^{-1} B^T Y \quad (27)$$

灰微分方程的白化方程 (影子方程):

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + a \times Z^{(1)}(k) = \sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(k) + \gamma \quad (28)$$

解得周期响应函数:

$$x_1^{(1)}(t) = \left(x_1^{(1)}(1) - \left(\sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(t) + \gamma \right) / a \right) \times e^{-at} + \left(\sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(t) + \gamma \right) / a \quad (29)$$

可求得时间响应函数:

$$x_1^{(1)}(k+1) = \left(x_1^{(1)}(1) - \left(\sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(k+1) + \gamma \right) / a \right) \times e^{-ak} + \left(\sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(k+1) + \gamma \right) / a \quad (30)$$

□

解得还原值:

$$x_1^{(0)}(k+1) = x_1^{(1)}(k+1) - x_1^{(1)}(k) \quad (31)$$

2.3 模型的结构相容性

在灰色系统理论中, 有许多常见的单变量或多变量预测模型, 如 GM(1, 1)、GM(1, N), 不同的模型具有不同的结构和表达式, 其对应的适用场景也有所差异. 从传统 GM(1, N) 预测模型表达式中不难看出, 当 $N=1$ 时, 该模型并不能等价于 GM(1, 1) 预测模型, 因此, GM(1, N) 与 GM(1, 1) 模型结构不相容, 即传统 GM(1, N) 模型泛化能力弱, 适用性较差. 而本文所提出的 IBSGM(1, N) 模型在满足一定条件时可以等价于传统 GM(1, 1)、GM(1, N) 模型, 具有较好的结构相容性.

命题 1. 对于所提出的 IBSGM(1, N) 模型与传统的 GM(1, 1) 模型, 不考虑对背景值所做的优化改进, 当 $N=1$, $a \cdot b \cdot \gamma \neq 0$ 时, IBSGM(1, N) 模型即为 GM(1, 1) 模型.

证明. 对于所提 IBSGM(1, N) 模型, 当 $N=1$, $a \cdot b \cdot \gamma \neq 0$ 时, 式 (23) 变为

$$x_1^{(0)}(k) + a \times [x_1^{(1)}(k)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{1-\lambda} = \gamma \quad (32)$$

根据定义 1 提出的改进背景值表达式:

$$Z^{(1)}(k) = [x_1^{(1)}(k)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{1-\lambda} \quad (33)$$

IBSGM(1, N) 模型表达式可写为:

$$x_1^{(0)}(k) + a \times Z^{(1)}(k) = \gamma \quad (34)$$

显然, 式 (34) 即为 GM(1, 1) 模型表达式, 也就是说当 $N=1$, $a \cdot b \cdot \gamma \neq 0$ 时, 不考虑对背景值所做的优化改进, IBSGM(1, N) 模型可以等价于 GM(1, 1) 模型, 称其与 GM(1, 1) 模型具有结构相容性. □

命题 2. 对于所提出的 IBSGM(1, N) 模型与传

统的 GM(1, N) 模型, 不考虑对背景值所做的优化改进, 当 $N > 1, a \cdot b \neq 0, \gamma = 0$ 时, IBSGM(1, N) 模型即为 GM(1, N) 模型.

证明. 对于 IBSGM(1, N) 预测模型, 当 $N > 1, a \cdot b \neq 0, \gamma = 0$ 时, 式 (23) 变为

$$x_1^{(0)}(k) + a \times [x_1^{(1)}(k)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{1-\lambda} = \sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(k) \quad (35)$$

根据定义 1 提出的改进背景值表达式:

$$Z^{(1)}(k) = [x_1^{(1)}(k)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{1-\lambda} \quad (36)$$

IBSGM(1, N) 模型表达式可写为:

$$x_1^{(0)}(k) + a \times Z^{(1)}(k) = \sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(k) \quad (37)$$

显然, 式 (37) 即为 GM(1, N) 模型表达式, 也就是说当 $N > 1, a \cdot b \neq 0, \gamma = 0$ 时, 不考虑背景值所做的优化改进, IBSGM(1, N) 模型可以等价于 GM(1, N) 模型, 称其与原 GM(1, N) 模型具有结构相容性. \square

3 模型性能比较与分析

3.1 背景值系数的估计

为了确定背景值系数的取值, 采用 MATLAB 对多维灰色预测模型进行数值分析, 通过穷举法计算在不同 λ 取值下 IBSGM(1, N) 模型的平均拟合误差 ε , 使 ε 达到最小值时的 λ 取值即为改进多维灰色预测模型的最优背景值系数.

具体步骤如下:

步骤 1. 输入原始特征序列及相关因素序列在 MATLAB 中建立 IBSGM(1, N) 预测模型;

$$x_1^{(0)}(k) + a \times [x_1^{(1)}(k)]^\lambda \times [x_1^{(1)}(k-1)]^{1-\lambda} = \sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(k) + \gamma \quad (38)$$

步骤 2. 初始化背景值系数 $\lambda = 0$;

步骤 3. λ 以步长 0.01 增加至 1 迭代计算模型平均拟合误差 ε ;

由定理 2 可得一次累加序列模拟值:

$$\hat{x}_1^{(1)}(k) = \left(x_1^{(1)}(1) - \left(\sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(1) + \gamma \right) / a \right) \times e^{-a(k-1)} + \left(\sum_{i=2}^N b_{i-1} x_i^{(1)}(1) + \gamma \right) / a \quad (39)$$

累减还原解得原始序列模拟值 $\hat{x}_1^{(0)}(k)$, 进而求得模型平均拟合误差:

$$\varepsilon = \frac{|\hat{x}_1^{(0)}(k) - x_1^{(0)}(k)|}{x_1^{(0)}(k)}, k = 1, 2, \dots, n \quad (40)$$

步骤 4. 求得使平均拟合误差 ε 取得最小值时的 λ 值即为 IBSGM(1, N) 预测模型的最优背景值系数解.

本文以寸草塔煤矿 22301 工作面瓦斯日均最大浓度预测研究为例^[21], $X_1^{(0)}$ 为特征序列日均瓦斯最大浓度 (%), 相关因素序列 $X_2^{(0)}$ 为工作面风量 (m^3/min), $X_3^{(0)}$ 为瓦斯抽放量 (m^3/min), $X_4^{(0)}$ 为瓦斯涌出量 (m^3/min), 采集相关数据记录如表 1 所示.

表 1 寸草塔煤矿日均瓦斯浓度及影响因素
Table 1 Daily average gas concentration and influencing factors in Cuncaoata Coal Mine

序号	$X_1^{(0)}$	$X_2^{(0)}$	$X_3^{(0)}$	$X_4^{(0)}$
1	0.34	0.34	21.7	0.34
2	0.34	0.29	18.1	0.36
3	0.26	0.29	25.3	0.31
4	0.26	0.41	21.4	0.33
5	0.23	0.51	25.3	0.28
6	0.22	0.37	22.3	0.29
7	0.21	0.38	23.2	0.23
8	0.17	0.41	22.5	0.35
9	0.17	0.36	24.1	0.19
10	0.16	0.48	22.9	0.25

利用 MATLAB 仿真实验, 当 $\lambda \in [0, 1]$ 时, λ 从 0 开始以 0.01 的精度逐渐增大, 求得模型拟合误差最小值 $\varepsilon = 0.0337$, 此时 $\lambda = 1$. 由此可得, 在该组实验数据下, 当背景值系数 $\lambda = 1$ 时, 模型拟合误差最小、预测精度最高, 且 IBSGM(1, N) 模型拟合误差为 3.37%, 较传统 GM(1, N) 预测模型拟合精度有显著提高. IBSGM(1, N) 与 GM(1, N) 模型预测模拟值对比见表 2.

3.2 预测结果对比分析

为了检验所提出的 IBSGM(1, N) 模型的性能, 本文进行了三个实例研究, 计算了 IBSGM(1, N) 多维灰色预测模型分别在三组实验数据下的模拟值和预测结果误差, 并与其他常用的单变量和多变量灰色预测模型的拟合情况及预测性能进行了对比分析.

例 1. 文献 [22] 提出了一种可以构造出自变量与因变量之间函数关系预测模型, 称为 OGM(1, N) 预测模型, 利用该模型对一种材料在 400°F 至 1100°F

表 2 IBSGM(1, N) 与 GM(1, N) 模型预测模拟值误差对比

Table 2 Comparison of prediction and simulation errors between IBSGM(1, N) and GM(1, N) model

实际值	0.34	0.34	0.26	0.26	0.23	0.22	0.21	0.17	0.17	0.16	平均误差
GM(1, N)	0.34	0.259	0.364	0.367	0.188	0.269	0.135	0.347	0.054	0.113	0.38
IBSGM(1, N)	0.34	0.33	0.27	0.25	0.247	0.219	0.204	0.173	0.16	0.165	0.0337

温度范围内的抗拉强度和布氏硬度的实验数据进行实验, 实验数据如表 3 所示, 由于温度条件的限制, 该组样本只有 400°F 至 1100°F 范围内的 8 组数据, 具有小样本数据集特征. 本文采用同样的数据比较了 IBSGM(1, N) 模型与其他灰色预测模型的模拟和预测性能.

表 3 一种热处理钢在 400°F 至 1100°F 的抗拉强度及布氏硬度

Table 3 The tensile strength and Brinell hardness of a heat-treated steel from 400°F to 1100°F

序号	$X_1^{(0)}$	$X_2^{(0)}$	$X_3^{(0)}$
1	897	514	400
2	897	495	500
3	890	444	600
4	876	401	700
5	848	352	800
6	814	293	900
7	779	269	1000
8	738	235	1100

示例实验数据中有三个变量, 其中 $X_1^{(0)}$ 为特征序列抗拉强度 (MPa), 相关因素序列 $X_2^{(0)}$ 为布氏硬度 (HBW), $X_3^{(0)}$ 为温度 (°F). 取前七组数据作为建模样本, 第八组数据作为测试样本, 利用 MATLAB 建立的 IBSGM(1, N) 模型进行计算, 得到模型参数值 $[a, b_1, b_2, \gamma, \lambda]^T$ 结果如表 4 所示, 模型预测结

表 4 IBSGM(1, N) 模型的参数值

Table 4 Parameter values of IBSGM(1, N) model

a	b_1	b_2	γ	λ
0.1711	0.2974	0.0247	728.1782	0

果及误差对比如表 5 所示.

由表 4 可以看出, 针对该组数据, IBSGM(1, N) 模型平均拟合误差为 0.0573%, GM(1, 1) 模型拟合误差小于 1%, 但预测误差接近 5%, GM(1, N) 模型拟合及预测误差较大, 预测性能不稳定. 相较于传统 GM(1, 1) 和 GM(1, N) 灰色预测模型, IBSGM(1, N) 模型的平均拟合误差及预测结果相对误差均要小得多, 且相较于文献 [22] 中提出的 OGM(1, N) 模型, IBSGM(1, N) 模型的模拟及预测性能也更胜一筹.

四种模型的模拟预测结果如图 3 所示, 可以看出 IBSGM(1, N) 模型实现了高精度预测, 且 GM(1, N) 模型拟合性能较 GM(1, 1) 更差, 验证了 GM(1, N) 模型缺陷分析的准确性, OGM(1, N) 与 IBSGM(1, N) 模型曲线均贴合实际值曲线, 但 IBSGM(1, N) 模型的模拟和预测性能更好.

例 2. 文献 [13] 提出了一种改进动态背景值系数 OBGGM(1, N) 模型, 通过粒子群算法寻找系统相对误差最小值以此求解背景值系数, 利用该模型对文献 [23] 中给出的中国无线通信用户人数和其他影响因素的数据进行了模拟预测, 实验数据如表 6

表 5 四种模型下预测结果和误差对比

Table 5 Comparison of prediction results and errors under the four models

序号	原始数据	IBSGM(1, N)模型		OGM(1, N)模型		GM(1, N)模型		GM(1, 1)模型	
		模拟值	相对误差	模拟值	相对误差	模拟值	相对误差	模拟值	相对误差
1	897	897	0	897	0	897	0	897	0
2	897	897.013	0.0015%	896.782	0.0243%	791.446	11.7674%	911.544	1.6214%
3	890	890.421	0.0473%	890.882	0.0991%	1013.103	13.8317%	886.265	0.4197%
4	876	874.707	0.1476%	874.589	0.1611%	919.923	5.0140%	861.687	1.6340%
5	848	849.283	0.1513%	848.921	0.1086%	854.567	0.7744%	837.790	1.2040%
6	814	813.571	0.0527%	813.797	0.0250%	797.161	2.0686%	914.556	0.0683%
7	779	779.005	0.0007%	778.952	0.0062%	798.870	2.5507%	791.967	1.6646%
平均拟合误差		0.0573%		0.0606%		5.1438%		0.9446%	
预测结果		预测值	相对误差	预测值	相对误差	预测值	相对误差	预测值	相对误差
8	738	735.263	0.3709%	742.147	0.5619%	787.425	6.6972%	770.004	4.3366%

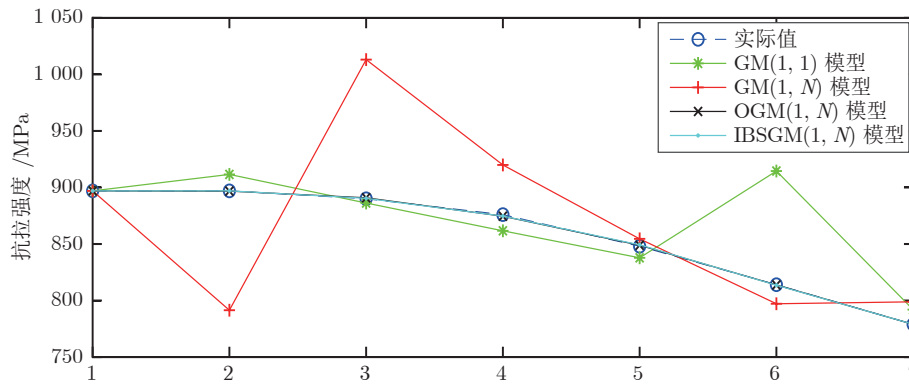


图 3 例 1 中四种模型的模拟预测结果曲线图

Fig.3 Curves of simulated prediction results of the four models in Example 1

表 6 中国无线通信用户数量和相关因素

Table 6 Number of wireless communication users and related factors in China

序号	$X_1^{(0)}$	$X_2^{(0)}$	$X_3^{(0)}$	$X_4^{(0)}$	$X_5^{(0)}$
1	8453.3	13985.6	99241.6	563.5498	17825.6
2	14522.2	21926.3	109655.2	703.5769	25566.3
3	20600.5	27400.3	120322.7	773.01	28656.8
4	26995.3	33698.4	135822.8	869.3998	35082.5
5	33482.4	39684.3	159878.3	1262.998	42346.9
6	39340.6	48241.7	184937.4	1371.631	47196.1
7	46105.8	61032	216314.4	1442.343	50279.9
8	54730.6	85496.1	265810.3	1709.221	51034.6
9	64124.5	114531.4	314045.4	1690.719	50863.2
10	74721.4	144084.7	340902.8	1684.903	49265.6
11	85900.3	150284.9	401.202	1641.464	46537.3

所示, 该文献只公布了 2000 年至 2010 年相关数据, 属于小样本数据集. 本文采用同样的数据比较了 IBSGM(1, N) 模型与其他灰色预测模型的模拟和预测性能.

示例实验数据中有四个变量, 其中 $X_1^{(0)}$ 为特征序列用户人数 (万户), 相关因素序列 $X_2^{(0)}$ 为移动交换机容量 (万户), $X_3^{(0)}$ 为 GDP (亿元), $X_4^{(0)}$ 为长途交换设备 (万端), $X_5^{(0)}$ 为本地交换设备 (万门). 取前十组数据作为建模样本, 第十组数据作为测试样本, 利用 MATLAB 建立 IBSGM(1, N) 预测模型进行仿真计算, 得到模型系统参数值 $[a, b_1, b_2, b_3, b_4, \gamma, \lambda]^T$ 结果如表 7 所示, 模型预测结果及误差对比如表 8 所示.

由表 8 可以看出, IBSGM(1, N) 预测模型在该组实验数据下的平均拟合误差为 0.25%, 而传统 GM(1, N) 模型的拟合误差高达 21.59%, 相较于传统 GM(1, 1) 和 GM(1, N) 灰色预测模型, IBSGM(1, N) 模型的平均拟合误差及预测结果相对误差均

表 7 IBSGM(1, N) 模型的参数值

Table 7 Parameter values of IBSGM(1, N) model

a	b_1	b_2	b_3	b_4	γ	λ
0.5083	0.2095	-0.0067	0.7883	0.2811	-533.748	0

要小得多, 且 IBSGM(1, N) 模型的模拟及预测性能比文献 [10] 中的 OBG(1, N) 模型性能更好.

四种模型的模拟预测结果如图 4 所示, 可以看到在四种模型中 IBSGM(1, N) 预测模型具有最高的预测精度, 与实际数据拟合度最高, 拟合误差明显小于 GM(1, N) 与 GM(1, 1) 模型, 虽然 OBG(1, N) 模型也取得了较高的精度, 但 IBSGM(1, N) 模型由于背景值取值更加灵活, 结构相容性更强, 预测性能更好.

例 3. 文献 [24] 提出了一种改进的多变量时滞 GM(1, N) 预测模型, 利用该模型对浙江省经济总产值与固定资产投资额进行预测, 实验数据如表 9 所示, 由于所用数据时《浙江省统计年鉴》只公布了

表 8 四种模型下预测结果和误差对比
Table 8 Comparison of prediction results and errors under the four models

序号	原始数据	IBSGM(1, N)模型		OBGM(1, N)模型		GM(1, N)模型		GM(1, 1)模型	
		模拟值	相对误差	模拟值	相对误差	模拟值	相对误差	模拟值	相对误差
1	8453.3	8453.3	0	8453.3	0	8453.3	0	8453.3	0
2	14522.2	14487.37	0.24%	14522.13	0	13547.07	6.71%	18836.59	29.71%
3	20600.5	20703.43	0.49%	20767.87	0.81%	26762.83	29.91%	22465.68	9.05%
4	26995.3	26927.63	0.25%	27021.5	0.10%	36603.21	35.59%	26793.96	0.75%
5	33482.4	33346.36	0.41%	33260.96	0.66%	44119.87	31.77%	31956.14	4.56%
6	39340.6	39540.97	0.51%	39664.41	0.82%	50502.83	28.37%	38112.87	3.12%
7	46105.8	46149.15	0.09%	46512.32	0.88%	57002.66	23.63%	45455.77	1.41%
8	54730.6	54533.32	0.36%	54578.75	0.28%	66192.81	20.94%	54213.37	0.95%
9	64124.5	64228.94	0.16%	64095.54	0.05%	77398.69	20.70%	64658.22	0.83%
10	74721.4	74706.12	0.02%	74999.45	0.37%	88385.60	18.29%	77115.40	3.20%
平均拟合误差		0.25%		0.4%		21.59%		5.36%	
预测结果		预测值	相对误差	预测值	相对误差	预测值	相对误差	预测值	相对误差
11	85900.3	86179.62	0.32%	85586.72	0.37%	95722.40	11.43%	91972.60	7.07%

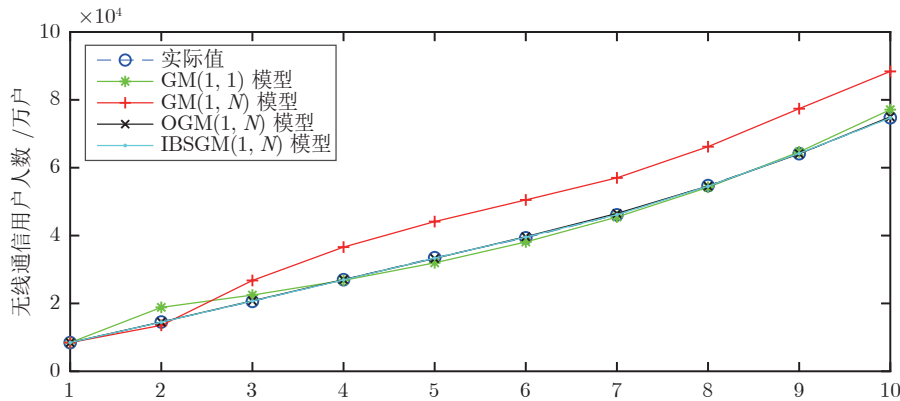


图 4 例 2 中四种模型的模拟预测结果曲线图

Fig.4 Curves of simulation prediction results of the four models in Example 2

表 9 2003-2011 年浙江省经济总产值与固定资产投资额
Table 9 2003-2011 Zhejiang province's total economic output value and fixed asset investment

序号	$X_1^{(0)}$	$X_2^{(0)}$
1	9705.02	4180.38
2	11648.7	5384.38
3	13417.7	6138.39
4	15718.47	6964.28
5	18753.73	7704.9
6	21462.69	8550.71
7	22990.35	9906.46
8	27722.31	11451.98
9	32318.85	14077.25

2003 ~ 2011 年的固定资产投资额数据, 具有小样本数据集特征. 本文采用同样的数据样本比较了 IBSGM

(1, N) 模型与其他灰色预测模型的模拟和预测性能.

示例实验数据中有两个变量, 其中 $X_1^{(0)}$ 为特征序列浙江省经济总产值 (亿元), 相关因素序列 $X_2^{(0)}$ 为固定资产投资额 (亿元). 取前八组数据作为建模样本, 第九组数据作为测试样本, 利用 MATLAB 建立的 IBSGM(1, N) 模型进行计算, 得到模型参数值 $[a, b_1, \gamma, \lambda]^T$ 结果如表 10 所示, 模型预测结果及误差对比如表 11 所示.

表 10 IBSGM(1, N) 模型的参数值
Table 10 Parameter values of IBSGM(1, N) model

a	b_1	γ	λ
0.0048	0.3268	8.6375	1

由表 11 可以看出, IBSGM(1, N) 模型在该组实验数据下的平均拟合误差为 1.52%, 而传统 GM(1, N)

模型的拟合误差高达 11.01%，传统 GM(1, 1) 模型拟合误差为 2.22%，且相较于文献 [24] 中提出的时滞 GM(1, N) 预测模型，本文所提出的 IBSGM(1, N) 预测模型在拟合效果及预测精度上都有更优的表现，对比三种模型的预测结果，IBSGM(1, N) 模型的预测相对误差为 0.66%，实现了高精度预测。

四种模型的模拟预测结果如图 5 所示，可以看到在四种模型中 IBSGM(1, N) 预测模型具有最高的预测精度，与实际数据拟合度最高，拟合误差明显小于传统的 GM(1, N)、GM(1, 1) 预测模型及时滞 GM(1, N) 预测模型。分析实验结果表明，IBSGM(1, N) 模型由于背景值取值更加灵活，结构相容性更强，使模型预测性能显著提高。

4 结论

现有的传统 GM(1, N) 多维灰色预测模型在实际预测领域中应用并不广泛，主要由于其背景值表

达式的构造存在较大误差及模型结构上存在缺陷。传统灰色预测模型为简化建模过程，其背景值表达式固定用几何梯形面积近似方程来表示，本文从背景值函数的几何意义出发，构造了一个新的背景值表达式，采用 MATLAB 数值分析对背景值系数的取值进行优化，并从理论上证明了新的背景值函数相较传统模型背景值函数的误差更小。考虑到传统 GM(1, N) 预测模型在结构上与 GM(1, 1) 等基础预测模型不兼容的问题，在模型中加入了灰色作用量，以反映自变量数据变换关系。通过理论证明，改进的 IBSGM(1, N) 模型具有与传统单变量和多变量灰色预测模型的结构相容性。本文通过对三个实验案例的研究，计算了 IBSGM(1, N) 的模拟值和预测误差，并与其他常见的灰色预测模型进行了对比分析，可以看出，由于本文所提 IBSGM(1, N) 模型背景值取值更加灵活，结构相容性更强，使模型预测性能有显著提高。

表 11 四种模型下预测结果和误差对比
Table 11 Comparison of prediction results and errors under the four models

序号	原始数据	IBSGM(1, N)模型		时滞GM(1, N)模型		GM(1, N)模型		GM(1, 1)模型	
		模拟值	相对误差	模拟值	相对误差	模拟值	相对误差	模拟值	相对误差
1	9705.02	9705.02	0	9705.02	0	9705.02	0	9705.02	0
2	11648.7	11660.78	0.10%	9554.96	17.97%	9991.74	20.43%	11562.08	0.74%
3	13417.7	13602.45	1.38%	12461.41	7.13%	16856.45	33.23%	13911.74	3.68%
4	15718.47	15802.97	0.54%	15718.47	0.00%	18698.06	10.94%	15882.74	1.05%
5	18753.73	18230.98	2.79%	20665.31	10.19%	19884.38	2.99%	18133.00	3.31%
6	21462.69	20922.41	2.52%	20773.85	3.21%	21595.31	8.91%	20702.07	3.54%
7	22990.35	24049.57	4.61%	25883.56	12.58%	25006.36	8.77%	23892.54	3.92%
8	27722.31	27659.11	0.23%	27355.39	1.32%	28491.67	2.78%	27293.70	1.55%
平均拟合误差		1.52%		6.55%		11.01%		2.22%	
预测结果		预测值	相对误差	预测值	相对误差	预测值	相对误差	预测值	相对误差
9	32318.85	32104.52	0.66%	31523.81	2.46%	34864.8	7.88%	31179.03	3.53%

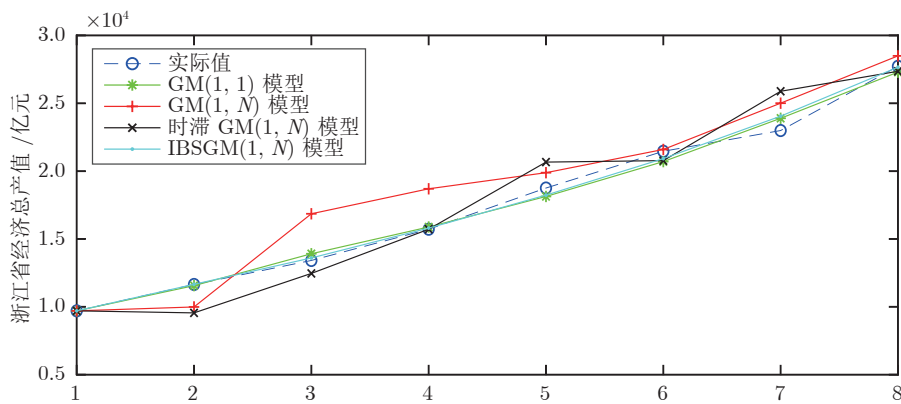


图 5 例 3 中四种模型的模拟预测结果曲线图

Fig. 5 Curves of simulation prediction results of the four models in Example 3

本文提出的结合背景值优化与改进模型结构相容性方法, 在理论证明和实验分析中均取得了较好的结果. 本文在对多维灰色预测模型的改进方法上进行了创新, 所提出的 IBSGM(1, N) 模型在预测精度和结构相容性方面有较强的优势, 适用于常规条件下的多变量灰色预测, 为灰色预测模型提供了新的改进思路. 在未来进一步的研究中可采用不同参数优化及模型结构改进方法相结合, 针对不同应用环境选取最优的预测模型.

在研究中发现, 对于文中实验案例给出的三组数据, IBSGM(1, N) 模型的背景值系数取值仅取了 0 和 1, 未作背景值系数取值的定性分析. 因此, 探究在更多不同实验数据下, 背景值系数的取值差异及规律是未来需要继续展开的工作.

References

- Liu Si-Feng, Dang Yao-Guo, Fang Zhi-Geng, et al. *Gray system theories and its applications. Fifth Edition*. Beijing: Science Press, 2010. 3-4
(刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用. 第五版. 北京: 科学出版社, 2010. 3-4)
- Zhang Xi-Lai, Zhao Jian-Hui, Cai Bo. Prediction model with dynamic adjustment for single time series of PM2.5. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(10): 1790-1798
(张熙来, 赵俭辉, 蔡波. 针对PM2.5单时间序列数据的动态调整预测模型. 自动化学报, 2018, **44**(10): 1790-1798)
- Ding S. A novel discrete grey multivariable model and its application in forecasting the output value of China's high-tech industries. *Computers & Industrial Engineering*, 2019, **127**: 749-760
- Chen Ning, Peng Jun-Jie, Wang Lei, Guo Yu-Qian, Gui Wei-Hua. Fuzzy grey cognitive networks modeling and its application. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(7): 1227-1236
(陈宁, 彭俊洁, 王磊, 郭宇骞, 桂卫华. 模糊灰色认知网络的建模方法及应用. 自动化学报, 2018, **44**(7): 1227-1236)
- Xie N M, Liu S F. Discrete grey forecasting model and its optimization. *Applied Mathematical Modelling*, 2009, **33**(2): 1173-1186
- Li Peng, Liu Si-Feng. Interval-valued intuitionistic fuzzy numbers decision-making method based on grey incidence analysis and D-S theory of evidence. *Acta Automatica Sinica*, 2011, **37**(8): 993-998
(李鹏, 刘思峰. 基于灰色关联分析和D-S证据理论的区间直觉模糊决策方法. 自动化学报, 2011, **37**(8): 993-998)
- Ma X, Liu Z B, Wang Y. Application of a novel nonlinear multivariate grey Bernoulli model to predict the tourist income of China. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, **347**: 84-94
- Zeng B, Luo C, Liu S, Bai Y, Li C. Development of an optimization method for the GM(1, N) model. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2016, **55**(October): 353-362
- Xiao X, Cheng S. Research on multicollinearity in the grey GM(1, N) model. *Journal of Grey System*, 2018, **30**(4): 60-77
- Guo J, Xiao X, Yang J, Sun Y. GM(1, 1) model considering the approximate heteroscedasticity. *Journal of Grey System*, 2017, **29**: 53-66
- Jiang Shi-Quan, Liu Si-Feng, Zhou Xing-Cai. Optimization of background value of GM(1, 1) model based on complex trapezoidal formula. *Control and Decision*, 2014, **29**(12): 2221-2225
(蒋诗泉, 刘思峰, 周兴才. 基于复化梯形公式的GM(1, 1)模型背景值的优化. 控制与决策, 2014, **29**(12): 2221-2225)
- Wang Y H, Liu Q, Tang J R, Cao W B, Li X Z. Optimization approach of background value and initial item for improving prediction precision of GM(1, 1) model. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2014, **25**(1): 77-82
- Zeng B, Li C. Improved multi-variable grey forecasting model with a dynamic background-value coefficient and its application. *Computers & Industrial Engineering*, 2018, **118**(April): 278-290
- Luo Y, Liu Q. The non-homogenous multi-variable grey model NFMGM(1, n) with fractional order accumulation and its application. *Journal of Grey System*, 2017, **29**: 39-52
- Luo Y X, Liu Q Y. The non-homogenous multi-variable grey model NFMGM(1, n) with fractional order accumulation and its application. *Journal of Grey System*, 2017, **29**: 39-52
- Ding Song, Dang Yao-Guo, Xu Ning, Zhu Xiao-Yue. Modelling and applications of DFCGM(1, N) and its extended model based on driving factors control. *Control and Decision*, 2018, **33**(4): 712-718
(丁松, 党耀国, 徐宁, 朱晓月. 基于驱动因素控制的DFCGM(1, N)及其拓展模型构建与应用. 控制与决策, 2018, **33**(4): 712-718)
- Wei B L, Xie N M, Yang Y J. Data-based structure selection for unified discrete grey prediction model. *Expert Systems with Application*, 2019, **136**: 264-275
- Zeng B, Duan H, Zhou Y. A new multivariable grey prediction model with structure compatibility. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, **75**: 385-397
- Liu Si-Feng, Yang Ying-Jie, Wu Li-Feng, et al. *Grey System Theory and Its Application. Seventh Edition*. Beijing: Science Press, 2014.1-2
(刘思峰, 杨英杰, 吴利丰等. 灰色系统理论及其应用[M]. 第七版. 北京: 科学出版社, 2014.1-2)
- Luo Y, Liu Q. Multivariable non-equidistance grey model with fractional order accumulation and its application. *Multivariable non-equidistance grey model with fractional order accumulation and its application*, 2018, **30**: 239-248
- Chen Shuai. Study on the prediction of gas emission concentration at the upper corner of the working face in Cuncaota Coal Mine. *Shaaxi Coal*, 2019, **38**(02): 21-24
(陈帅. 寸草塔煤矿回采工作面上隅角瓦斯涌出浓度预测研究. 陕西煤炭, 2019, **38**(02): 21-24)
- Zeng B, Luo C, Liu S, et al. Development of an optimization method for the GM(1, N) model. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2016, **55**(October): 353-362
- Zhang Ke. Multi-variables discrete grey model based on driver control. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2014, **34**(8): 2084-2091
(张可. 基于驱动控制的多变量离散灰色模型. 系统工程理论与实践, 2014, **34**(8): 2084-2091)
- Wang Zheng-Xin. Multivariable time-delay GM(1, N) model and its application. *Control and Decision*, 2015, **30**(12): 2298-2304
(王正新. 多变量时滞GM(1, N)模型及其应用. 控制与决策, 2015, **30**(12): 2298-2304)



缪燕子 中国矿业大学信息与控制工程学院教授. 主要研究方向为多传感器信息融合, 机器人智能感知与控制. 本文通信作者.

E-mail: myz@cumt.edu.cn

(MIAO Yan-Zi Professor at the School of Information and Control

Engineering, China University of Mining and Technology. Her research interest covers multi-sensor information fusion, intelligent perception and control of robot. Corresponding author of this paper.)



王志铭 中国矿业大学信息与控制工程学院硕士研究生, 2019 年获中国矿业大学电气工程及其自动化学士学位. 主要研究方向为预测控制, 煤矿安全.

E-mail: 04151249@cumt.edu.cn

(WANG Zhi-Ming Master student

at the School of Information and Control Engineering, China University of Mining and Technology. She received her bachelor degree from China University of Mining and Technology in 2019. Her research interest covers predictive control, and coal mine safety.)



李守军 宿迁学院机电工程学院副教授. 主要研究方向为工业自动化, 人工智能与灰色系统理论.

E-mail: lishoujunbox@126.com

(LI Shou-Jun Associate Professor at the School of Mechanical and Electrical Engineering of Suqian

College. His research interest covers industrial automation, artificial intelligence and grey system theory.)



代伟 中国矿业大学信息与控制工程学院教授. 主要研究方向为复杂工业过程建模, 运行优化与控制.

E-mail: weidai@cumt.edu.cn

(DAI Wei Professor at the School of Information and Control Engineering, China University of Mining

and Technology. His research interest covers modeling, operational optimization and control for complex industrial process.)