

具有输入约束和输出噪声的不确定系统级联线性自抗扰控制

高阳¹ 吴文海¹ 王子健¹

摘要 针对一类具有输入约束和输出噪声的 SISO (Single input single output) 不确定非线性系统, 提出了一种基于误差补偿和工程滤波的抗饱和级联线性自抗扰控制 (Linear active disturbance rejection control, LADRC) 方法. 首先针对高频量测噪声, 分析了线性扩张状态观测器 (Linear extended state observer, LESO) 对噪声的放大机理及其与观测器增益的定量关系, 进而设计了一种基于工程滤波器的级联 LADRC 方法, 在滤除噪声的同时有效补偿了因滤波所造成的输出幅值和相位损失, 确保了闭环系统的跟踪精度. 然后继续考虑输入饱和的问题, 利用 LADRC 的实时估计/补偿能力, 通过将饱和差值信号引入 LESO, 设计了一种基于误差补偿的抗饱和 LADRC 方法, 有效减小了系统设计控制量, 避免了系统长时间陷入饱和. 通过实时仿真比较, 验证了所提出方法的有效性.

关键词 级联线性自抗扰控制, 输入饱和约束, 高频量测噪声, 滤波器, 抗饱和和补偿

引用格式 高阳, 吴文海, 王子健. 具有输入约束和输出噪声的不确定系统级联线性自抗扰控制. 自动化学报, 2022, 48(3): 843–852

DOI 10.16383/j.aas.c190305

Cascaded Linear Active Disturbance Rejection Control for Uncertain Systems With Input Constraint and Output Noise

GAO Yang¹ WU Wen-Hai¹ WANG Zi-Jian¹

Abstract For a class of SISO (single input single output) uncertain nonlinear systems with input constraint and output noise, an anti-saturation cascaded linear active disturbance rejection control (LADRC) method based on error compensation and engineering filtering is proposed. Firstly, aiming at high frequency measurement noise, the amplification mechanism of linear extended state observer (LESO) and its quantitative relationship with LESO gain are analyzed. On this basis, a cascaded LADRC scheme using engineering filter is designed to remove the noise while compensating for the amplitude and phase losses of system output caused by filtering, which ensures the tracking accuracy of closed-loop system. Then continuing to consider input saturation, using the real-time estimation/compensation capability of LADRC, the saturation difference signal is introduced into LESO, thus an anti-saturation LADRC scheme based on error compensation is designed, which effectively reduces the designed control variable and avoids the system falling into saturation for a long time. By real-time simulation comparison, the effectiveness of the proposed method is verified.

Key words Cascaded linear active disturbance rejection control, input saturation constraint, high frequency measurement noise, filter, anti-saturation compensation

Citation Gao Yang, Wu Wen-Hai, Wang Zi-Jian. Cascaded linear active disturbance rejection control for uncertain systems with input constraint and output noise. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(3): 843–852

不确定系统的控制是控制科学的核心问题^[1]. 围绕此问题, 涌现出大量的现代控制方法, 如自适应控制、鲁棒控制、内模原理、滑模控制等^[2], 但这些方法在处理不确定性时, 往往因特定的局限性而不利于工程实用. 反倒是经典的 PID 控制, 以其“天

生”的抗干扰性和模型不依赖性, 至今仍广泛应用于工业控制领域. 沿承 PID 控制的思想精髓^[3], 韩京清^[4]在对依赖于精确数学模型的控制理论进行深刻反思的基础上, 于 20 世纪 90 年代提出了更为高效的自抗扰控制 (Active disturbance rejection control, ADRC) 技术. 大量理论^[5–7]和应用^[8–9]方面的研究表明, ADRC 不依赖被控对象的精确数学模型, 对具有未建模动态、参数摄动和外界干扰的系统均能实施有效控制, 具有很强的鲁棒性和抗干扰性.

然而, 受限于原始 ADRC 所采用的非线性、非光滑反馈结构, 其理论分析十分困难, 需调节的控

收稿日期 2019-04-17 录用日期 2019-07-30
Manuscript received April 17, 2019; accepted July 30, 2019
国家自然科学基金 (51505491, 60674090) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of China (51505491, 60674090)
本文责任编辑 乔俊飞
Recommended by Associate Editor QIAO Jun-Fei
1. 海军航空大学青岛校区控制工程与指挥系 青岛 266041
1. Department of Control Engineering and Command, Qingdao Branch, Naval Aviation University, Qingdao 266041

制器参数也较多. 为简化 ADRC 的分析与实现, 文献 [10–12] 针对不同类型的不确定系统, 研究了线性 ADRC (Linear ADRC, LADRC) 方法并着重分析了 LADRC 的收敛性, 揭示了系统性能与控制参数的定量关系. 此外, 文献 [13] 提出了一种基于高增益观测器的 LADRC 方法, 并进一步放宽假设条件给出了收敛性证明. 然而, 上述研究除针对系统的不确定因素外, 均没有考虑其他限制条件. 而在实际系统的输入、输出环节中, 往往会存在两类不容忽视的问题: 输入约束和输出噪声.

输入约束通常是由执行机构的物理和结构限制所致, 以位置饱和最为常见, 如不及时采取措施加以抑制, 可能会导致系统动态性能变差甚至不稳定. 对此, 主要有两种处理策略: 1) 直接对执行机构的饱和特性进行设计, 利用光滑函数近似饱和函数, 然后将逼近误差作为系统扰动, 对新系统设计鲁棒自适应控制器^[14–15]; 2) 在忽略执行机构约束的情况下, 预先设计满足要求的控制器, 然后在控制器中引入辅助信号对输入饱和进行补偿^[16–18]. 策略 1) 虽然具有较好的抗饱和效果, 但需要依赖约束的具体信息, 且控制器设计复杂, 实时性较差; 相比之下, 策略 2) 能够极大地简化控制器的设计, 计算灵活高效, 且不影响约束范围内的系统性能, 因而广泛应用于工业实际中.

另外, 在量测输出时不可避免地还会引入高频噪声, 而噪声对于 LADRC 性能的影响是十分显著的. 这是因为, LADRC 的核心技术是线性扩张状态观测器 (Linear extended state observe, LESO), 增大观测器增益可提高其跟踪性能, 但同时也会放大高频噪声, 进而引起系统控制量的大幅度高频振荡, 这对于执行机构而言是不可承受的. 为解决观测器性能与其对噪声敏感性的矛盾, 国内外学者提出了多种不同方案. 文献 [19] 设计了一种增益可切换观测器, 即采用大增益重构系统状态, 当观测误差减小到一定值后切换为小增益, 以减小高频噪声的影响. 文献 [20] 和文献 [21] 则分别通过在高增益观测器中引入随机逼近策略和快速滤波器来处理量测噪声, 从而最大限度地保持了观测器的原本特性. 而文献 [22–23] 直接设计了一种增益在线调整的自适应观测器来解决该问题, 虽然较前两种方案有更好的噪声抑制效果, 但观测器设计复杂, 工程实现难度大. 对此, 工程上往往采用简单的滤波器处理方式, 但这会造成滤波后输出信号的幅值和相位损失.

针对上述现状和问题, 本文在文献 [13] 的基础

上, 继续研究了具有输入受限和输出噪声的不确定系统的 LADRC 方法. 首先, 定量分析了 LESO 对噪声的放大机理, 明确了噪声对 LADRC 系统的影响; 在此基础上, 改进了具有工程实用性的滤波器噪声处理方式, 提出了一种基于滤波器的级联 LADRC 方法, 可实现对滤波后输出幅值和相位损失的有效补偿; 最后, 基于策略 2) 给出的饱和处理方案, 进一步提出了一种基于滤波器的抗饱和级联 LADRC 方法, 使有效滤波的同时解决了系统输入饱和的问题.

1 问题描述及预备知识

1.1 系统描述

考虑如下的 SISO (Single input single output) 不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = f(x^{(n-1)}, \dots, \dot{x}, x, t) + w + bu(v) \\ y = x + v_{fn} \end{cases} \quad (1)$$

其中, x 为系统状态变量; y 为具有高频噪声 v_{fn} 的系统量测输出; $f(\cdot)$ 为系统不确定的内部动态; w 为外部干扰; b 为时变不确定的控制增益, 满足 $b_1 < b < b_2$, b_1, b_2 为常数; v 为执行器输入, $u(v)$ 为受饱和特性影响的执行器输出, 其数学模型为

$$u(v) = \text{sat}(v) = \begin{cases} u_{\max}, & v > u_{\max} \\ v, & u_{\min} \leq v \leq u_{\max} \\ u_{\min}, & v < u_{\min} \end{cases} \quad (2)$$

其中, $u_{\max} > 0, u_{\min} < 0$ 为已知的饱和界限值.

取常数 $b_0 \in (b_1, b_2)$, 而将 $(b - b_0)u(v)$ 作为未知的控制扰动, 并将系统所有不确定性当作总扰动 $g(\cdot) = f(\cdot) + w + (b - b_0)u(v)$, 取状态变量 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, \dots, x_n = x^{(n-1)}$, 然后将总扰动扩充为新的状态变量 $x_{n+1} = g(\cdot)$, 并记 $\dot{x}_{n+1} = h$, 令 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n+1}]^T$, 可得系统 (1) 的扩张状态空间方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u(v) + \mathbf{c}h \\ y = \mathbf{d}\mathbf{x} + v_{fn} \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(n+1) \times (n+1)}, \mathbf{b} = [0 \ \dots \ 0 \ b_0 \ 0]^T, \mathbf{c} = [0 \ \dots \ 0 \ 1]^T, \mathbf{d} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$, 且 $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbf{R}^{n+1}$.

为便于分析, 对系统 (3) 作如下假设:

假设 1. 量测噪声有界且满足 $|v_{\text{in}}| \leq \mu$, 常数 $\mu > 0$.

假设 2. 存在常数 $M > 0$, 使得 $|h| \leq M$ 在区间 $[0, \infty)$ 上一致成立.

注 1. 由于 $h = \dot{g}(\cdot)$ 不仅是时间 t 的函数, 还是 \boldsymbol{x} 和 u 的函数, 因而直接设定 $|h| \leq M$ 这一条件很难得到预先检验; 而根据此前研究可知^[13], 若放宽对系统总扰动的假设, 可得到 $|h|$ 为关于系统估计和跟踪误差的函数, 但这会增加系统分析的复杂性. 实际上, 直接假设 h 有界并不影响对系统控制性能的分析, 只是会改变分析过程中的一些常系数值.

1.2 线性自抗扰控制

对于系统 (1), 当不考虑输入约束和输出噪声时, 可设计如下的 LADRC 控制器^[13]: 它由线性跟踪微分器 (Linear tracking differentiator, LTD)、线性扩张状态观测器和线性状态误差反馈 (Linear state error feedback, LSEF) 三部分组成.

1.2.1 线性跟踪微分器

LTD 在 LADRC 中相对独立, 其作用在于跟踪给定的输入信号 v_0 并得到输入的各阶微分信号 $v_0^{(i)}$, 即有 $v_1 \rightarrow v_0, v_{i+1} \rightarrow v_0^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n$. 令 $\boldsymbol{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{n+1}]^T$, 可将 LTD 表示为

$$\dot{\boldsymbol{v}} = A_{\text{TD}}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{b}_{\text{TD}}v_0 \quad (4)$$

$$\text{其中, } A_{\text{TD}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 R^{n+1} & a_2 R^n & a_3 R^{n-1} & \dots & a_{n+1} R \end{bmatrix} \in$$

$\mathbf{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, $\boldsymbol{b}_{\text{TD}} = [0 \ \dots \ 0 \ -a_1 R^{n+1}]^T \in \mathbf{R}^{n+1}$, R 为决定跟踪快慢的调节增益, 系数 $a_j (j = 1, 2, \dots, n+1)$ 需满足矩阵 \bar{A} 是 Hurwitz 的, $\bar{A} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

1.2.2 线性扩张状态观测器

LADRC 的模型不依赖性和鲁棒性正是基于 LESO 对系统总扰动的实时估计, 因而 LESO 是 LADRC 的核心技术. 令 $\boldsymbol{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{n+1}]^T$ 为系统状态 \boldsymbol{x} 的估计, 利用实时的输入 u 、输出 y 可

构造如下的 LESO:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}} = A\boldsymbol{z} + \boldsymbol{b}u + Q\boldsymbol{k}(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{z} \end{cases} \quad (5)$$

其中, $Q = \text{diag}\{1/r \ 1/r^2 \ \dots \ 1/r^{n+1}\}$, r 为调节参数 (相当于 LESO 增益的倒数), $\boldsymbol{k} = [-k_1 \ -k_2 \ \dots \ -k_{n+1}]^T$, 系数 $k_j (j = 1, 2, \dots, n+1)$ 需满足

$$\text{矩阵 } \bar{K} \text{ 是 Hurwitz 的, } \bar{K} = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_n & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -k_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in$$

$\mathbf{R}^{(n+1) \times (n+1)}$.

1.2.3 线性状态误差反馈

定义系统的状态误差 $e_1 = z_1 - v_1, e_2 = z_2 - v_2, \dots, e_n = z_n - v_n$, 并考虑对总扰动 x_{n+1} 的实时补偿, 令 $\boldsymbol{e} = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]^T$, 可设计如下的 LSEF:

$$u = \frac{\boldsymbol{l}\boldsymbol{e} + v_{n+1} - z_{n+1}}{b_0} \quad (6)$$

其中, $\boldsymbol{l} = [l_1 \ l_2 \ \dots \ l_n]$, 系数 $l_i (i = 1, 2, \dots, n)$

$$\text{需满足矩阵 } \bar{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n} \text{ 是}$$

Hurwitz 的.

2 高频量测噪声对 LESO 的影响

2.1 理论分析

首先, 忽略输入饱和的影响. 定义 LESO 估计误差 $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}$, 其中, $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \dots \ \varepsilon_{n+1}]^T$, 对其沿式 (3) 和式 (5) 求导, 可得

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (A + Q\boldsymbol{k}\boldsymbol{d})\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{c}h + Q\boldsymbol{k}v_{\text{in}} \quad (7)$$

取误差变换矩阵 $\bar{Q} = \text{diag}\{1/r^n \ 1/r^{n-1} \ \dots \ 1/r^0\}$, 令 $\boldsymbol{\xi} = \bar{Q}\boldsymbol{\varepsilon}$, 其中, $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_{n+1}]^T$, 对其求导可将式 (7) 变换为

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{r}\bar{K}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{c}h + \frac{1}{r^{n+1}}\boldsymbol{k}v_{\text{in}} \quad (8)$$

定理 1. 对于满足假设 1 和假设 2 的不确定系统 (1), 设计 LESO(5), 则对任意的 $t \in (t_0, \infty)$, 存在依赖于 t_0 的常数 $T > 0$ 和独立常数 $B > 0$, 使得对任意的 $r \in (0, 1)$, 满足

$$\|\varepsilon\| \leq Tr + \frac{B\mu}{r^n}$$

且当 $r = (nB\mu/T)^{1/(n+1)}$ 时, 有

$$\sup \|\varepsilon\| = \left(\frac{n+1}{n}\right) T^{\frac{n}{n+1}} (nB\mu)^{\frac{1}{n+1}}$$

注 2. 若无特别说明, 文中 $\|\cdot\|$ 指 Euclid 范数.

证明. 取 Lyapunov 函数 $V: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ 为

$$V(\xi^T) = \xi^T P \xi \tag{9}$$

其中, 矩阵 $P > 0$ 是 Lyapunov 方程 $P\bar{K} + \bar{K}^T P = -I_{n+1}$ 的解, I_{n+1} 为 $n+1$ 维单位矩阵.

对式 (9) 沿式 (8) 求关于时间 t 的导数, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi^T) &= \frac{1}{r} \xi^T (\bar{K}^T P + P \bar{K}) \xi + (c^T P \xi + \xi^T P c) h + \\ &\quad \frac{1}{r^{n+1}} (\mathbf{k}^T P \xi + \xi^T P \mathbf{k}) v_{\text{in}} \leq \\ &\quad -\frac{1}{r} \|\xi\|^2 + |c^T P \xi + \xi^T P c| M + \\ &\quad \frac{1}{r^{n+1}} |\mathbf{k}^T P \xi + \xi^T P \mathbf{k}| \mu \end{aligned} \tag{10}$$

令 $\lambda_{\min}(P)$ 和 $\lambda_{\max}(P)$ 分别为矩阵 P 的最小和最大奇异值, 记 $\varpi_1 = \sqrt{n+1} \lambda_{\min}(P)$, $\varpi_2 = \sqrt{n+1} \lambda_{\max}(P)$, 则有 $\varpi_1 \leq \|P\|_F \leq \varpi_2$, $\|P\|_F$ 指矩阵 P 的 Frobenius 范数, 从而可得

$$\begin{aligned} |c^T P \xi + \xi^T P c| &\leq \|c\| \|P \xi\| + \|\xi\| \|P c\| \leq \\ &2\|P\|_F \|\xi\| \leq 2\varpi_2 \|\xi\| \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}^T P \xi + \xi^T P \mathbf{k}| &\leq \|\mathbf{k}\| \|P \xi\| + \|\xi\| \|P \mathbf{k}\| \leq \\ &2\|P\|_F \|\mathbf{k}\| \|\xi\| \leq 2\varpi_2 \|\mathbf{k}\| \|\xi\| \end{aligned} \tag{12}$$

同理可得

$$\varpi_1 \|\xi\|^2 \leq V(\xi^T) \leq \varpi_2 \|\xi\|^2 \tag{13}$$

将式 (11)~(13) 代入式 (10), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi^T) &\leq -\frac{1}{r} \|\xi\|^2 + 2\varpi_2 \left(M + \frac{\mu}{r^{n+1}} \|\mathbf{k}\|\right) \|\xi\| \leq \\ &\quad -\frac{B_1}{r} V(\xi^T) + B_2 \sqrt{V(\xi^T)} \end{aligned} \tag{14}$$

其中, $B_1 = \frac{1}{\varpi_2}$, $B_2 = 2\varpi_2(M + \frac{\mu}{r^{n+1}} \|\mathbf{k}\|)/\sqrt{\varpi_1}$, 即有

$$\frac{d}{dt} \sqrt{V(\xi^T)} \leq -\frac{B_1}{2r} \sqrt{V(\xi^T)} + \frac{B_2}{2} \tag{15}$$

因此 $\forall t > t_0$, 求解式 (15), 可得

$$\begin{aligned} \|\xi\| &\leq \sqrt{\frac{V(\xi^T)}{\varpi_1}} \leq \sqrt{\frac{V(\xi^T(t_0))}{\varpi_1}} e^{-\frac{B_1}{2r}(t-t_0)} + \\ &\quad \frac{B_2}{2\sqrt{\varpi_1}} \int_{t_0}^t e^{-\frac{B_1}{2r}(t-\tau)} d\tau \leq \frac{2\sqrt{V(\xi^T(t_0))}}{\sqrt{\varpi_1} B_1 (t-t_0)} r + \\ &\quad \frac{B_2}{B_1 \sqrt{\varpi_1}} r - \frac{B_2}{B_1 \sqrt{\varpi_1}} r e^{-\frac{B_1}{2r}(t-t_0)} \leq \\ &\quad B_3 r + B_4 \frac{\mu}{r^n} \end{aligned} \tag{16}$$

其中, $B_3 = \frac{2\varpi_2 \sqrt{V(\xi^T(t_0))}}{\sqrt{\varpi_1} (t-t_0)} + \frac{2\varpi_2^2 M}{\varpi_1}$, $B_4 = \frac{2\varpi_2^2 \|\mathbf{k}\|}{\varpi_1}$.

进而 $\forall r \in (0, 1)$, 可得

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\| &= \|\bar{Q}^{-1} \xi\| \leq \|\bar{Q}^{-1}\|_F \|\xi\| < \\ &\quad \sqrt{n+1} \left(B_3 r + B_4 \frac{\mu}{r^n}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

由式 (17) 可知, 当系统输出不含噪声 ($\mu = 0$) 时, r 越小, LESO 估计误差越小, 且有 $\lim_{r \rightarrow 0} \|\varepsilon\| = 0$; 但系统包含量测噪声时, r 不能任意小, 且当 $r = (nB_4\mu/B_3)^{1/(n+1)}$ 时, 有

$$\sup \|\varepsilon\| = \left(\frac{(n+1)^{\frac{3}{2}}}{n}\right) B_3^{\frac{n}{n+1}} (nB_4\mu)^{\frac{1}{n+1}}$$

具体来看, 且有

$$|\varepsilon_i| = r^{n+1-i} |\xi_i| \leq r^{n+1-i} \|\xi\| \leq$$

$$B_3 r^{n+2-i} + B_4 \frac{\mu}{r^{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1 \tag{18}$$

式 (18) 表明, r 在 $(0, 1)$ 内取值越小, 被估计状态 x_i 阶数越高, LESO 对噪声放大效果越显著; 尤其对系统总扰动的估计 $z_{n+1} \rightarrow x_{n+1}$, 受高频噪声的影响最大, 这必然使总扰动不能被实时抵消, 影响 LAD-RC 的控制性能. \square

2.2 算例验证

例 1. 考虑如下的 SISO 二阶不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(t, x_1, x_2) + w + u \\ y = x_1 + v_{\text{in}} \end{cases} \tag{19}$$

假设系统未知的内部动态和外部干扰分别为

$$f(\cdot) = 0.5x_1^2 + (0.2 + e^{-0.1x_1})x_2 + \sin(2t) \cos(x_2)$$

$$w(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 2 \\ 0.5 \cos(2t), & 2 < t < 5 \\ 2, & t \geq 5 \end{cases}$$

量测噪声为 $v_{\text{in}} = \mu v_{\text{ino}}$, $\mu = 0.025$ 为噪声强度, v_{ino}

为 $[-1, 1]$ 上均匀分布的白噪声.

首先, 忽略量测噪声. 利用 LADRC 式 (4) ~ (6) 对系统 (19) 进行控制, 设定参考输入 $v_0 = 1$, 取 $b_0 = 1$; 依据文献 [13] 给出的参数整定原则, 取控制器系数 $[a_1, a_2, a_3] = [-1, -3, -3]$, $[k_1, k_2, k_3] = [3, 3, 1]$, $[l_1, l_2] = [-1, -2]$, 调节控制器增益 $R = 10$, $r = 0.002$. 通过对系统不确定性的准确估计和补偿, 可得到较为理想的系统单位阶跃响应和控制输入, 如图 1 所示.

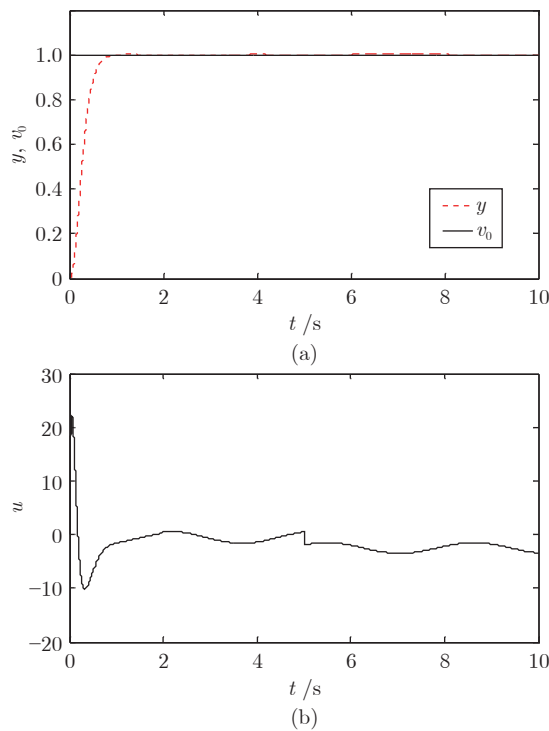


图 1 忽略量测噪声时的闭环系统响应

Fig.1 Closed-loop system responses ignoring measurement noise

但当存在量测噪声时 (不改变控制器参数), 由于 LESO 对噪声的放大效应, 导致系统总扰动 $x_3 = f + w$ 不能被准确估计, 控制量受其影响作同等幅度的高频振荡, 系统输出亦在设定值附近高频波动, 如图 2 所示. 此外, LESO 在估计系统状态 x_1, x_2, x_3 时, 对噪声的放大效应是逐级增强的, 其中对 x_3 的估计误差达到 10^3 级, 这与式 (18) 计算的结果是一致的. 另取 $r = 0.005$ 和 0.01 对 x_3 进行估计, 如图 3 所示. 比较图 2(c) ~ 2(d) 可以看出, 随着 r 的增大, LESO 对噪声的敏感度迅速减弱, 但同时也加剧了系统输出的振荡, 降低了系统的动态稳定性.

3 基于滤波器的级联 LADRC 方法

3.1 传统滤波控制策略

在实际系统中, 为了消除高频量测噪声的影响,

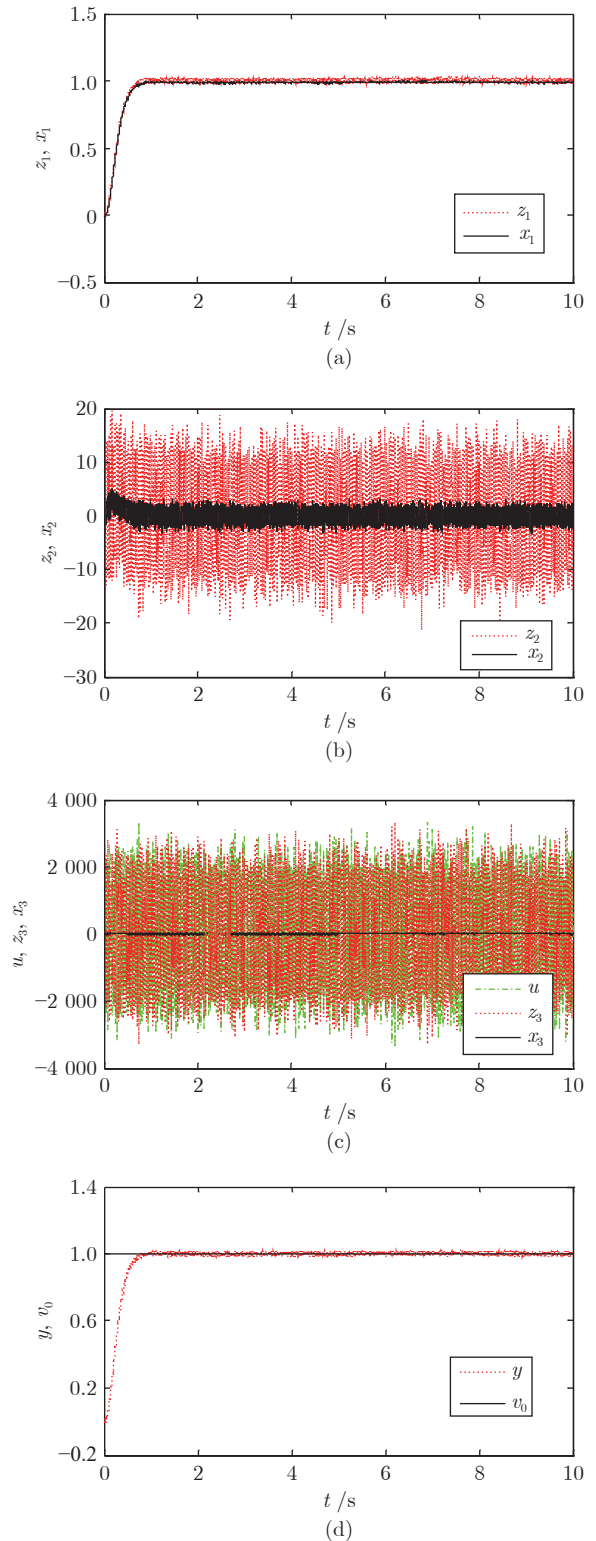


图 2 考虑量测噪声时的闭环系统响应

Fig.2 Closed-loop system responses considering measurement noise

通常利用低通滤波器对输出信号进行滤波, 再将滤波后的信号送入控制器. 滤波器的形式为

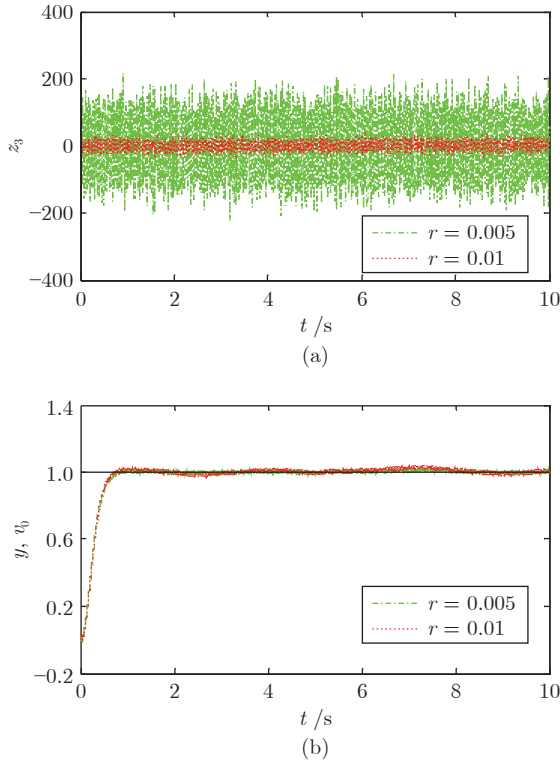


图 3 不同 r 值对系统控制性能的影响

Fig.3 Effect on system control performance with different values of r

$$y_0^{(m)} = f_f(y_0^{(m-1)}, \dots, \dot{y}_0, y_0, y) \quad (20)$$

其中, y_0 为滤波后的信号, m 为滤波器的阶数. 此时 LESO(5) 变为

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + bu + Qk(\hat{y} - y_0) \\ \hat{y} = dz \end{cases} \quad (21)$$

然而, 滤波器 (20) 在消除噪声的同时, 还会改变系统输出的幅值和相位, 使 y_0 与 x (即滤波器输出与未加入噪声的系统原输出) 之间存在差异, 这种差异将在 LESO(21) 中被放大, 从而导致原系统的状态不能得到良好估计.

例 2. 将系统 (19) 的输出通过一阶低通滤波器 (22) 后, 利用 LADRC 式 (4)、式 (21) 和式 (6) 进行控制, 取 $r = 0.002$, $\omega = 5$, 其他参数不变, 结果如图 4 所示.

$$y_0(s) = \frac{\omega}{s + \omega} y(s) \quad (22)$$

可以看出, 通过滤波器后高频噪声被滤除, 但 LESO 对系统状态 x_1 的估计误差却很大 (对 x_2, x_3 同样如此), 这是由于 z_1 实际上是对 y_0 的估计, 而 y_0 与 x 之间存在差异, 从而导致系统较大的控制惯性, 最终影响了 LADRC 的跟踪性能 ($y_0 \rightarrow v_0$).

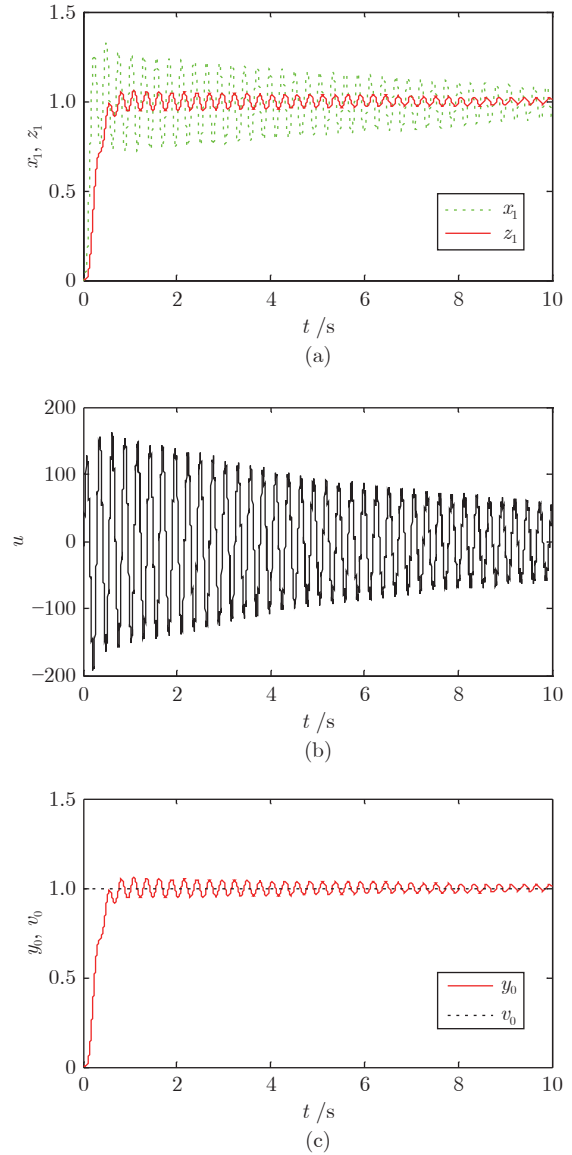


图 4 加入滤波器对系统控制性能的影响

Fig.4 Effect on system control performance adding filter

3.2 新型滤波控制策略

为了补偿因滤波所造成的幅值和相位损失, 将滤波器 (20) 的输出 扩充为系统 (1) 新的状态变量 $x_f = y_0$, 即将滤波器 (20) 与系统 (1) 组成复合系统, 以利用 LADRC 进行估计和补偿. 本质上, 该系统相当于一个不受噪声影响的 $m + n$ 阶串级系统

$$\begin{cases} x_f^{(m)} = f_f(x_f^{(m-1)}, \dots, \dot{x}_f, x_f, y) \\ x^{(n)} = f(x^{(n-1)}, \dots, \dot{x}, x, t) + w + bu \\ y = x + v_{in} \\ y_0 = x_f \end{cases} \quad (23)$$

对于系统 (23), 其控制层级为控制量 u 驱动 x ,

再将 x 作为虚拟控制量 u_f 驱动 x_f , 最终达到控制的目的. 由于 $f_f(\cdot)$ 和 $f(\cdot)$ 均具有不确定性, 因此根据式 (1) ~ (6) 的控制思想, 可构造一个级联 LADRC 结构来获取控制量 u_f 和 u , 如图 5 所示, 其中系统总扰动 $g = f(\cdot) + w + (b - b_0)u$, $g_f = f_f(\cdot) - b_0^f u_f$.

令 $x_1^f = x_f, x_2^f = \dot{x}_f, \dots, x_m^f = x_f^{(m-1)}, x_{m+1}^f = g_f, \dot{x}_{m+1}^f = h_f$, 记 $\mathbf{x}_f = [x_1^f \ x_2^f \ \dots \ x_{m+1}^f]^T$, 可得系统 (23) 的扩张状态空间方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_f = A_f \mathbf{x}_f + \mathbf{b}_f u_f + \mathbf{c}_f h_f \\ \dot{\mathbf{x}} = A \mathbf{x} + \mathbf{b} u + \mathbf{c} h \\ \mathbf{y} = \mathbf{d} \mathbf{x} + v_m \\ y_0 = \mathbf{d}_f \mathbf{x}_f \end{cases} \quad (24)$$

其中, $A_f, \mathbf{b}_f, \mathbf{c}_f, \mathbf{d}_f$ 是分别与 $A, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ 形式相同的 $m + 1$ 维矩阵或向量.

针对系统 (24), 令 $\mathbf{v}_f = [v_1^f \ v_2^f \ \dots \ v_{m+1}^f]^T, \mathbf{z}_f = [z_1^f \ z_2^f \ \dots \ z_{m+1}^f]^T, \mathbf{e}_f = [e_1^f \ e_2^f \ \dots \ e_m^f]^T = [z_1^f - v_1^f \ z_2^f - v_2^f \ \dots \ z_m^f - v_m^f]^T$, 可设计级联 LADRC (Cascaded LADRC, CLADRC) 控制器为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_f = A_{TD}^f \mathbf{v}_f + \mathbf{b}_{TD}^f v_0 \\ \dot{\mathbf{z}}_f = A_f \mathbf{z}_f + \mathbf{b}_f u_f + Q_f \mathbf{k}_f (\hat{y}_f - y_0) \\ \hat{y}_f = \mathbf{d}_f \mathbf{z}_f \\ u_f = \frac{\mathbf{l}_f \mathbf{e}_f + v_{m+1}^f - z_{m+1}^f}{b_0^f} \\ \dot{\mathbf{v}} = A_{TD} \mathbf{v} + \mathbf{b}_{TD} u_f \\ \dot{\mathbf{z}} = A \mathbf{z} + \mathbf{b} u + Q \mathbf{k} (\hat{y} - y) \\ \hat{y} = \mathbf{d} \mathbf{z} \\ u = \frac{\mathbf{l} \mathbf{e} + v_{n+1} - z_{n+1}}{b_0} \end{cases} \quad (25)$$

其中, $A_{TD}^f, \mathbf{b}_{TD}^f, Q_f, \mathbf{k}_f, \mathbf{l}_f$ 是分别与 $A_{TD}, \mathbf{b}_{TD}, Q, \mathbf{k}, \mathbf{l}$ 形式相同的矩阵或向量, 只是其中的系数由 a, k, l (省略下标) 变为 a^f, k^f, l^f (省略下标), 增益由 R, r 变为 R_f, r_f , 并将阶数由 n 改为 m .

注 3. 对于低通滤波器 (20), 虽然其高阶形式具有更好的滤波效果, 但同时也可能破坏系统的稳定性. 因此, 在 CLADRC 系统 (24) 和 (25) 中采用一

阶低通滤波器 (22) 即可, 因为由此所造成的差异还可通过 LADRC1 予以补偿.

例 3. 针对例 1 的系统采用 CLADRC(25) 进行控制, 其中滤波器仍采用式 (22), 并取 $\omega = b_0^f = 1$. 参照文献 [13] 的参数选取原则, 取 $a_1^f = -1, a_2^f = -2, k_1^f = 2, k_2^f = 1, l_1^f = -20$, 调节控制器增益 $R_f = 2, r_f = 0.1, R = 50, r = 0.1$, 其他参数与例 1 相同, 仿真结果如图 6 所示.

比较图 4 可以看出, 该控制策略利用 LADRC1 的补偿作用, 消除了由滤波所造成的不利影响, 改善了对系统状态的估计效果 ($z_1 \rightarrow x_1$), 实现了对参考输入的精确稳定跟踪 ($y_0 \rightarrow v_0$), 同时避免了控制量的大幅高频振颤, 从而验证了该方法的有效性.

4 基于滤波器的抗饱和级联 LADRC 方法

在上述研究的基础上, 继续考虑系统 (1) 存在输入饱和的情况. 不难理解, 当执行器由于饱和而不能响应控制器的输出时, 将会使系统响应变得迟缓, 引起滞后和振荡, 甚至导致系统不稳定.

例 4. 针对例 3 的 CLADRC 系统, 在不改变控制器参数的情况下, 设定执行器饱和的界限值为 $u_{\max} = 26, u_{\min} = -17$, 仿真结果如图 7 所示.

图 7 显示, 在执行器受限的情况下, 系统实际控制量长时间处于饱和和振颤状态, 闭环系统响应变得振荡而无法及时稳定. 当进一步缩小饱和约束的范围时, 闭环系统将处于发散状态.

产生上述现象的本质是由于执行器饱和而导致系统状态不能被准确估计, 为此, 进一步提出了一种基于滤波器和误差补偿策略的抗饱和级联 LADRC 方法. 该方法的作用机理是将执行器输入和输出的差值信号再反馈到 LESO 的输入端, 使 LESO 获取更详细的系统信息, 进而利用 LADRC 的估计和补偿作用来消除这个差值, 达到抗饱和的目的. 对于由式 (1) 和式 (20) 组成的级联系统, 设计具有抗噪声和抗饱和能力的 LADRC 控制器为

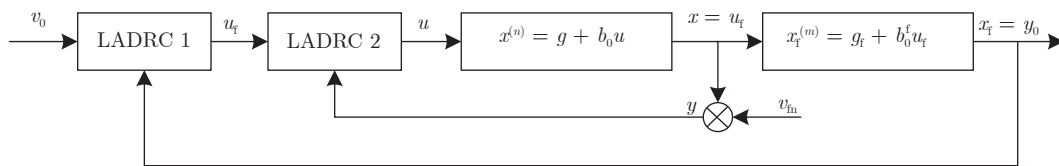


图 5 基于 LADRC 的级联控制系统结构

Fig.5 Structure of cascade control system based on LADRC

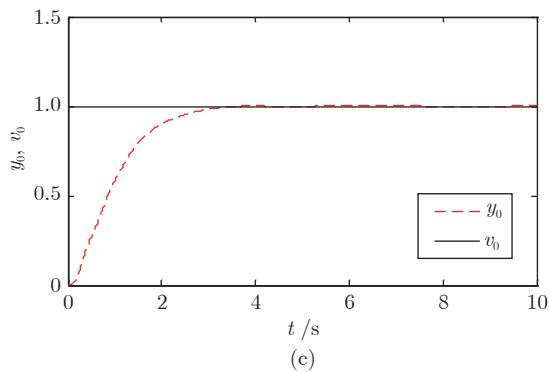
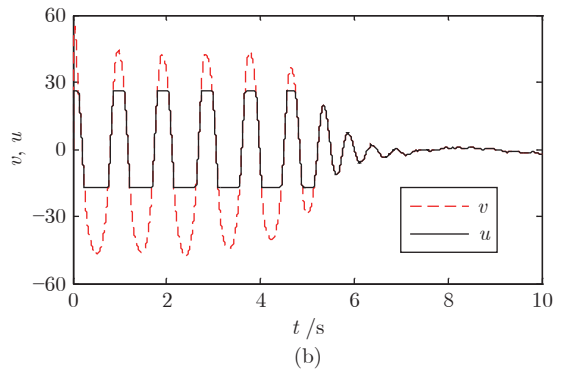
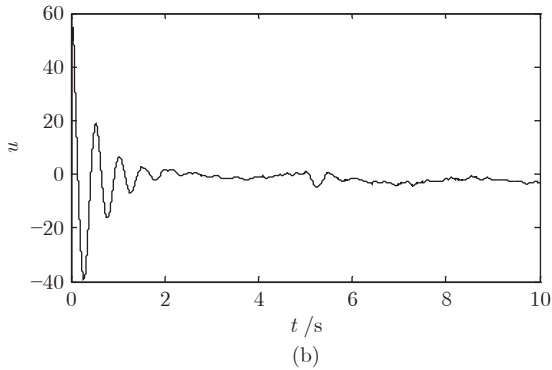
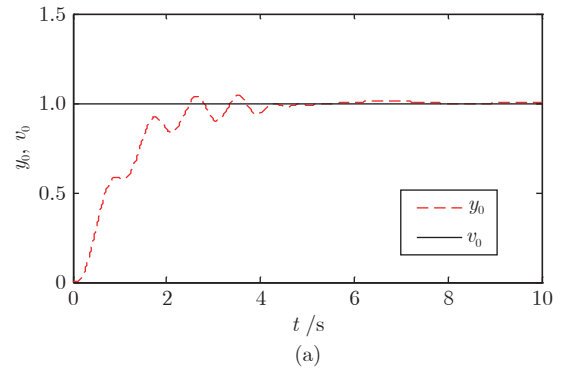
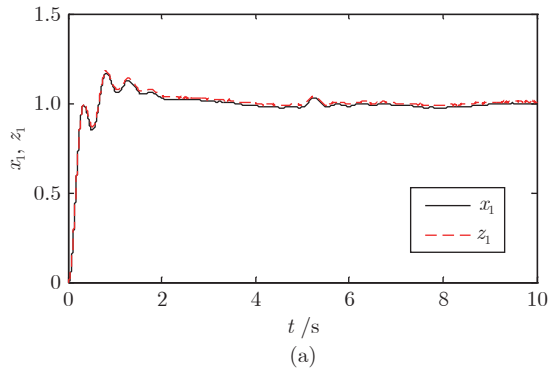


图 6 基于 CLADRC 的闭环系统响应

Fig. 6 Closed-loop system responses based on CLADRC

$$\begin{cases}
 \dot{v}_f = A_{TD}^f v_f + b_{TD}^f v_0 \\
 \dot{z}_f = A_f z_f + b_f u_f + Q_f k_f (\hat{y}_f - y_0) \\
 \hat{y}_f = d_f z_f \\
 u_f = \frac{l_f e_f + v_{m+1}^f - z_{m+1}^f}{b_0^f} \\
 \dot{v} = A_{TD} v + b_{TD} u_f \\
 \dot{z} = A z + b v + Q k (\hat{y} - y) - b k_c (v - u) \\
 \hat{y} = d z \\
 v = \frac{l e + v_{n+1} - z_{n+1}}{b_0} \\
 u = \text{sat}(v)
 \end{cases} \quad (26)$$

图 7 输入饱和约束下的 CLADRC 闭环系统响应

Fig. 7 Closed-loop system responses with input saturation based on CLADRC

其中, k_c 为补偿增益, 增大 k_c 可提高误差补偿速度, 但同时可能引起 LESO 不稳定, 因此需要适当调节.

例 5. 将控制器 (26) 作用于例 4 中的被控对象, 调节 $k_c = 0.8$, 其他控制器参数仍不变, 仿真结果如图 8 所示.

可以看出, 该抗饱和方案通过误差补偿有效减小了设计控制量 v , 使实际控制量 u 能够很快脱离饱和并维持在约束范围内, 系统响应基本不受输入饱和的影响 (即图 8(a) 中的 y_{01} 与图 6(a) 中的 y_0 基本一致), 同时也不影响 CLADRC 的抗噪声能力, 验证了该方法的有效性.

进一步地, 将饱和约束的范围压缩为原来的 60% 至 $u_{\max} = 11$, $u_{\min} = -15$ 时, 不改变控制器参数, 系统仍能保持较好的跟踪性能 ($y_{02} \rightarrow v_0$), 而不采用该策略的闭环系统 ($k_c = 0$) 响应将很快发散至无穷大处, 表明该方法对输入饱和的界限还具有一定的鲁棒性.

5 结束语

本文研究了一类具有输入约束和输出噪声的不确定非线性系统的线性自抗扰控制问题. 首先针对输出中常见的高频量测噪声, 分析了 LESO 对噪声的放大机理及其与 LESO 增益的定量关系, 明确了

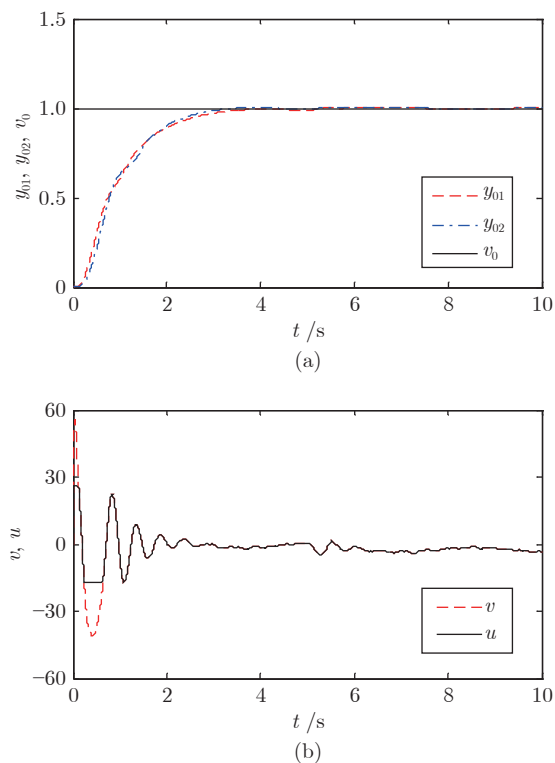


图 8 基于抗饱和 CLADRC 的闭环系统响应

Fig.8 Closed-loop system responses based on anti-saturation CLADRC

噪声对具有高增益特性的 LADRC 系统的影响. 在此基础上, 提出了一种基于滤波器的级联 LADRC 方法, 在滤除噪声的同时还克服了因滤波所造成的输出幅值和相位损失, 确保了闭环系统的精确稳定跟踪. 最后考虑执行器受限的情况, 利用 LADRC 的实时估计/补偿能力, 进一步提出了一种基于滤波器和误差补偿策略的抗饱和级联 LADRC 方法, 又解决了系统输入饱和的问题. 上述控制方法在克服输入约束和输出噪声的同时, 始终保持了自抗扰控制结构的不变性, 因而具有一定的适用性. 通过算例仿真, 验证了该方法的有效性.

References

- Gao Z Q. On the centrality of disturbance rejection in automatic control. *ISA Transactions*, 2014, **53**(4): 850–857
- Guo Bao-Zhu. An introduction to active disturbance rejection control for nonlinear systems. *Mathematical Modeling and Its Applications*, 2017, **6**(1): 13–22 (郭宝珠. 非线性系统的自抗扰控制引论. *数学建模及其应用*, 2017, **6**(1): 13–22)
- Han J Q. From PID to active disturbance rejection control. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2009, **56**(3): 900–906
- Han Jing-Qing. Active disturbance rejection controller and applications. *Control and Decision*, 1998, **13**(1): 19–23 (韩京清. 自抗扰控制器及其应用. *控制与决策*, 1998, **13**(1): 19–23)
- Guo B Z, Zhao Z L. On convergence of nonlinear active disturbance rejection for SISO systems. In: *Proceedings of the 24th Chinese Control and Decision Conference*. Taiyuan, China: IEEE, 2012. 3507–3512
- Qi X H, Li J, Xia Y Q, Gao Z Q. On the robust stability of active disturbance rejection control for SISO systems. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2017, **36**(1): 65–81
- Xue W C, Huang Y. Performance analysis of 2-DOF tracking control for a class of nonlinear uncertain systems with discontinuous disturbances. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2018, **28**(4): 1456–1473
- Li Z Y, Li X M, Zhou Z Y. Active disturbance rejection controller for loitering unit with parameter uncertainty. In: *Proceedings of the 16th International Conference on Control, Automation and Systems*. Gyeongju, Korea (South): IEEE, 2016. 140–144
- Long Y, Du Z J, Cong L, Wang W D, Zhang Z M, Dong W. Active disturbance rejection control based human gait tracking for lower extremity rehabilitation exoskeleton. *ISA Transactions*, 2017, **67**: 389–397
- Chen Zeng-Qiang, Sun Ming-Wei, Yang Rui-Guang. On the stability of linear active disturbance rejection control. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(5): 574–580 (陈增强, 孙明玮, 杨瑞光. 线性自抗扰控制器的稳定性研究. *自动化学报*, 2013, **39**(5): 574–580)
- Xue W C, Huang Y. Performance analysis of active disturbance rejection tracking control for a class of uncertain LTI systems. *ISA Transactions*, 2015, **58**: 133–154
- Xue W C, Huang Y. On performance analysis of ADRC for a class of MIMO lower-triangular nonlinear uncertain systems. *ISA Transactions*, 2014, **53**(4): 955–962
- Gao Yang, Wu Wen-Hai, Gao Li. Linear active disturbance rejection control for high-order nonlinear systems with uncertainty. *Control and Decision*, 2020, **35**(2): 483–491 (高阳, 吴文海, 高丽. 高阶不确定非线性系统的线性自抗扰控制. *控制与决策*, 2020, **35**(2): 483–491)
- Li Y M, Tong S C, Li T S. Direct adaptive fuzzy backstepping control of uncertain nonlinear systems in the presence of input saturation. *Neural Computing and Applications*, 2013, **23**(5): 1207–1216
- Molavi A, Jalali A, Naraghi M G. Adaptive fuzzy control of a class of nonaffine nonlinear system with input saturation based on passivity theorem. *ISA Transactions*, 2017, **69**: 202–213
- Xu B, Huang X Y, Wang D W, Sun F C. Dynamic surface control of constrained hypersonic flight models with parameter estimation and actuator compensation. *Asian Journal of Control*, 2014, **16**(1): 162–174
- Peng Xiu-Yan, Jia Shu-Li, Zhang Biao. An anti-saturation method for a class of nonlinear systems with actuator saturation. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(5): 798–804 (彭秀艳, 贾书丽, 张彪. 一类具有执行器饱和的非线性系统抗饱和方法研究. *自动化学报*, 2016, **42**(5): 798–804)
- Lin An-Hui, Jiang De-Song, Zeng Jian-Ping. Underactuated ship formation control with input saturation. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(8): 1496–1504 (林安辉, 蒋德松, 曾建平. 具有输入饱和的欠驱动船舶编队控制. *自动化学报*, 2018, **44**(8): 1496–1504)
- Prasov A A, Khalil H K. A nonlinear high-gain observer for systems with measurement noise in a feedback control framework. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(3): 569–580

- 20 Lee J, Choi J, Khalil H K. New implementation of high-gain observers in the presence of measurement noise using stochastic approximation. In: Proceedings of the 2016 European Control Conference. Aalborg, Denmark: IEEE, 2016. 1740–1745
- 21 Teel A R. Further variants of the Astolfi/Marconi high-gain observer. In: Proceedings of the 2016 American Control Conference. Boston, USA: IEEE, 2016. 993–998
- 22 Battilotti S. Robust observer design under measurement noise with gain adaptation and saturated estimates. *Automatica*, 2017, **81**: 75–86
- 23 Nair R R, Behera L. Robust adaptive gain higher order sliding mode observer based control-constrained nonlinear model predictive control for spacecraft formation flying. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2018, **5**(1): 367–381



高 阳 海军航空大学青岛校区博士研究生。2015 年获空军勤务学院硕士学位。主要研究方向为固定翼飞机飞行控制, 自抗扰控制理论与应用。本文通信作者。

E-mail: gy_hkdx@126.com

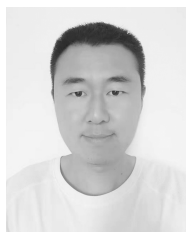
(GAO Yang Ph.D. candidate at Qingdao Branch, Naval Aviation University. He received his master degree from Air Force Logistics College in 2015. His research interest covers fixed-wing aircraft flight control, active disturbance rejection control theory and its application. Corresponding author of this paper.)



吴文海 海军航空大学青岛校区教授。2004 年获南京航空航天大学博士学位。主要研究方向为综合飞行控制系统, 舰载机着舰引导控制, 现代战机攻击导引控制。

E-mail: sophia_wxc@126.com

(WU Wen-Hai Professor at Qingdao Branch, Naval Aviation University. He received his Ph.D. degree from Nanjing University of Aeronautics and Astronautics in 2004. His research interest covers integrated flight control system, carrier landing guidance control of carrier-based aircraft, and attack guidance control of modern fighter.)



王子健 海军航空大学青岛校区讲师。2012 年获海军航空大学硕士学位。主要研究方向为飞行控制与测试。

E-mail: hkdx_2017@126.com

(WANG Zi-Jian Lecturer at Qingdao Branch, Naval Aviation University. He received his master degree from Naval Aviation University in 2012. His research interest covers flight control and test.)