

具有对抗关系和时变拓扑的耦合离散系统有界双向同步

翟世东^{1,2} 刘佩^{1,2} 高辉^{1,2}

摘要 针对含有对抗关系和时变拓扑的耦合离散系统, 本文研究了这类系统有界双向同步问题 (Bounded bipartite synchronization, BBS). 考虑了以下两种情形: 1) 在某时刻所有个体不能划分为两个敌对阵营; 2) 尽管在每一个时刻所有个体都可以被划分为两个敌对阵营, 但每个阵营中的成员随着时间的推移而改变. 对于以上两种情形, 耦合系统不能达到双向同步, 可以在一定条件下达到有界双向同步. 本文得到了使耦合离散系统达到有界双向同步的一些充分条件, 并通过一个数值例子验证了所得结论的有效性.

关键词 双向同步, 有界双向同步, 符号图, 离散系统

引用格式 翟世东, 刘佩, 高辉. 具有对抗关系和时变拓扑的耦合离散系统有界双向同步. 自动化学报, 2022, 48(3): 909–916

DOI 10.16383/j.aas.c190251

Bounded Bipartite Synchronization for Coupled Discrete Systems Under Antagonistic Interactions and Time-varying Topologies

ZHAI Shi-Dong^{1,2} LIU Pei^{1,2} GAO Hui^{1,2}

Abstract For coupled discrete systems with antagonistic interactions and time-varying topologies, this paper studies the bounded bipartite synchronization (BBS) for such coupled systems. This paper considers the following two cases: 1) At some time instants all agents cannot be divided into two hostile camps; 2) Although all agents can be partitioned into two hostile camps, the members of hostile camps change as time goes on. For the above conditions, the coupled systems cannot achieve bipartite synchronization, and can achieve BBS under some conditions. This paper obtains some sufficient conditions such that the coupled discrete system achieves BBS, and one numerical example is provided to illustrate the effectiveness of obtained results.

Key words Bipartite synchronization, bounded bipartite synchronization (BBS), signed graph, discrete systems

Citation Zhai Shi-Dong, Liu Pei, Gao Hui. Bounded bipartite synchronization for coupled discrete systems under antagonistic interactions and time-varying topologies. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(3): 909–916

同步 (一致) 行为是生物、生态、工程和社会科学等领域中最普遍的群聚现象之一. 在过去十几年里, 耦合系统中仅由局部交互引起的同步问题引起了大量研究者的关注^[1-5]. 在自然和工程系统中, 合作、竞争关系普遍存在, 且很多实际系统同时存在合作与竞争关系, 例如社会网络^[6]、存在合作与竞争的种

群^[7]、竞争性细胞神经元^[8] 和个性化推荐^[9]. 为了描述系统中的合作与竞争关系, 研究者们引入了符号图, 其中正数边表示合作关系, 负数边表示竞争关系.

目前, 越来越多的研究人员开始利用符号图来研究网络中的各种群聚现象^[10-16]. 在文献 [10] 中, Altafini 研究了定义在符号图上的一个积分器网络, 并得到了关于双向一致的一些定理. 这里的双向一致表示所有的智能体都收敛到一个模量相等、符号不同的值. 其中, 作者假设符号图是结构平衡的, 即所有节点可以被分为两个阵营, 每个阵营内部是合作关系, 两个阵营之间是竞争关系. 这个假设对双向一致性结论的得出至关重要. 文献 [10] 的结论推广到了更一般的线性多智能体系统^[11-13], 其中每个智能体都由一个线性时不变系统表示. 例如对于有向图上的积分器网络, 文献 [13] 在符号图含有生成树的情况下得到了达到双向一致的一些充分条件. 很多研究者陆续对各种特定网络展开了双向同步问题研究, 例如双向聚集^[14]、区间双向一致^[15]、含有时

收稿日期 2019-03-26 录用日期 2019-08-08
Manuscript received March 26, 2019; accepted August 8, 2019
国家自然科学基金 (11502039), 重庆市自然科学基金 (cstc2019jcyj-msxmX0109), 重庆市教委创新团队项目 (CXTDX201601019) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (11502039), Natural Science Foundation of Chongqing of China (cstc2019jcyj-msxmX0109), and Innovation Team Project of Chongqing Education Committee (CXTDX201601019)

本文责任编辑 鲁仁全

Recommended by Associate Editor LU Ren-Quan

1. 重庆邮电大学自动化学院 重庆 400065 2. 重庆邮电大学复杂系统与仿生控制重庆市重点实验室 重庆 400065

1. School of Automation, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065 2. Key Laboratory of Complex Systems and Bionics Control of Chongqing Municipality, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065

滞的双向一致^[16]等. 基于压缩性分析, 文献 [17] 研究了耦合非线性网络的双向同步问题. 对于耦合离散系统构成的网络, 其双向同步问题也受到了很多研究者的关注^[18-19]. 对于更多的关于双向同步的研究, 可以参见综述文献 [20-21].

在实际系统中, 随着时间的推移, 网络的拓扑结构可能会发生变化. 而且, 网络所形成的符号图可能不满足结构平衡特性. 例如, 在社会网络中, 个体之间的关系可能会由合作 (友谊) 到竞争 (敌意) 变化, 反之亦然; 在多党制的国家, 很多成员经常会从一个党派转向另一个党派. 当符号图不满足结构平衡性时, 网络不能达到双向同步. 在文献 [22] 中, 作者利用矩阵的最终为正性质, 分别研究了连续和离散时间舆论动力学模型的动力学行为. 当符号图随着时间变化的时候, 网络构成一个切换系统. 文献 [23-24] 考虑了所有符号图在结构上都是平衡的, 且敌对阵营的成员随着时间的推移是不变的情况. 具体地, 在文献 [23] 中, 作者得到了使非线性系统达到模同步的充分条件; 在文献 [24] 中, 作者设计了一种牵引控制, 使闭环系统实现双向同步. 如果这些符号图中的节点随着时间变化, 那么双向同步将不可能达到.

本文将研究含有对抗性关系和时变拓扑的耦合离散系统的有界双向同步 (Bounded bipartite synchronization, BBS) 问题. 考虑以下情形: 1) 在某些时刻, 所有个体不能被分为两个敌对阵营; 2) 虽然所有个体可以被划分为两个阵营. 但所形成敌对阵营中的成员会随时间改变. 当情形 1) 和 2) 出现时, 将这种耦合离散系统看成是一个特定网络的扰动, 在这个特定网络中, 所有的个体都可以被分成两个敌对阵营, 且二者中的成员随着时间的推移会保持不变. 在该特定网络的所有符号图都是连通的条件下, 本文得到了使系统达到有界双向同步的一些充分条件. 最后, 利用一个数值例子来说明所得结论的有效性.

本文符号说明如下: $|x|$ 表示实数 x 的绝对值, \mathbf{Z}^+ 表示正整数域, $\|\mathbf{y}\|$ 表示向量 \mathbf{y} 的范数, I_N 表示 N 维单位矩阵, $\mathbf{1}_N$ 表示元素都为 1 的 N 维列向量, 运算符 \otimes 表示 Kronecker 积. 对于矩阵 A , 符号 $\lambda_{\min}(A)$, $\lambda_{\max}(A)$ 分别表示矩阵 A 的最小特征值和最大特征值. $\text{diag}\{\cdot\}$ 表示一个对角矩阵, $\text{sgn}(\cdot)$ 代表符号函数. 如果对于每个固定的 s , 函数 $\beta(r, s)$ 是严格递增的且 $\beta(0, s) \equiv 0$, 对于每个固定的 r , 函数 $\beta(r, s)$ 是严格递减的且 $\lim_{s \rightarrow \infty} \beta(r, s) = 0$, 那么函数 $\beta(r, s)$ 称为 KL 类函数.

1 问题描述

考虑包含 N 个离散系统的网络

$$\mathbf{x}_i(k+1) = A\mathbf{x}_i(k) + B\mathbf{u}_i(k) \quad (1)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, N$. $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n$ 是第 i 个节点的状态, A, B 是常数矩阵, $\mathbf{u}_i(k)$ 是控制输入. 假设网络的拓扑在 p 个无向符号图 $G(E^k)$ (符号图定义见附录 A), $k = 1, 2, \dots, p$ 之间切换, 其中切换信号是 $\sigma(k) : \mathbf{Z}^+ \rightarrow P := \{1, 2, \dots, p\}$, 它是一个分段右连续的函数. 控制输入 $\mathbf{u}_i(k)$ 设计为

$$\mathbf{u}_i(k) = K \sum_{j=1}^N \left| e_{ij}^{\sigma(k)} \right| \left(\text{sgn} \left(e_{ij}^{\sigma(k)} \right) x_j(k) - x_i(k) \right) \quad (2)$$

其中, K 是一个需要设计的增益矩阵, e_{ij} 是图 $G(E^k)$ 的边值. 令 $\mathbf{x} = [x_1^T \dots x_N^T]^T$, $\{k_i : i = 0, 1, \dots\}$ 是 $\sigma(k)$ 的切换时刻. 存在正常数 $T > 1$, 使得 $k_{i+1} - k_i \geq T$, $\forall i \geq 0$.

注 1. 网络在切换信号下构成一个切换系统. 本文中要求存在正常数 $T > 1$, 使得 $k_{i+1} - k_i \geq T$, $\forall i \geq 0$. 这里的 $T > 1$ 可以看成是驻留时间. 如果没有驻留时间, 那么在有限时间内可能会有无限次切换, 对于系统的收敛性会有很大影响.

通常来说, 如果符号图结构平衡, 那么其所有节点可以划分为两个敌对阵营, 其中每个阵营中的个体之间的关系是合作的, 属于不同阵营的个体之间的关系是对立的. 对于符号图 $G(E^k)$, $k = 1, 2, \dots, p$, 可能存在以下情况: 1) 虽然每一个符号图都满足结构平衡, 即每个符号图都可以划分为两个敌对阵营, 但是每一个符号图的两个敌对阵营中的个体是不一样的, 例如在多党派执政的国家, 一些个体随着时间变化从一个阵营转移到另一个阵营; 2) 可能存在某些不满足结构平衡的符号图. 在这些情况下, 网络很难达到双向同步. 为了研究这两种情况下的网络的同步问题, 将这些符号图看成是某些特定结构平衡符号图的扰动. 具体地, 假设符号图 $G(E^k)$ 的邻接矩阵可以分为两个邻接矩阵, 即 $E^k = \bar{E}^k + w^k$, 其中, \bar{E}^k 是关于符号图 $G(\bar{E}^k)$ 的一个邻接矩阵. 把控制输入 (2) 中的符号图改为 $G(\bar{E}^k)$ 可以得到一个新的输入

$$\bar{\mathbf{u}}_i(k) = K \sum_{j=1}^N \left| \bar{e}_{ij}^{\sigma(k)} \right| \left(\text{sgn} \left(\bar{e}_{ij}^{\sigma(k)} \right) x_j(k) - x_i(k) \right) \quad (3)$$

因此, 由符号图 $G(E^k)$ 形成的耦合系统 (1) 和 (2) 可以看成是由符号图 $G(\bar{E}^k)$ 形成的耦合系统 (1) 和 (3) 的扰动. 而且, 假设符号图 $G(\bar{E}^k)$, $k = 1, 2, \dots$,

p 的节点 $\{1, 2, \dots, N\}$ 可以划分为两个敌对阵营 V_1, V_2 , 且存在一个符号矩阵 Ψ ($\Psi = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_N\}$, $\sigma_i \in \{\pm 1\}$), 使得矩阵 $\Psi \bar{E}^k \Psi$, $k = 1, 2, \dots, p$ 都是非负矩阵.

接下来, 本文将研究当控制输入为式 (2) 时, 网络 (1) 将在何种条件下达到有界双向同步. 双向同步和有界双向同步的定义分别如下.

定义 1. 如果存在依赖于非零初始条件的函数 $\zeta(k) \neq 0$, 使得以下条件成立: $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_i(k) - \zeta(k)) = 0, \forall i \in V_1, \lim_{k \rightarrow \infty} (x_i(k) + \zeta(k)) = 0, \forall i \in V_2$, 那么控制输入为式 (3) 的网络 (1) 达到双向同步.

定义 2. 如果满足以下两个条件, 那么控制输入为式 (2) 的网络 (1) 达到有界双向同步: 1) 网络 (1) 在形式为式 (3) 的控制输入下达到双向同步; 2) 存在一个正常数 ξ (依赖于非零初始条件), 一个 KL 类函数 $\beta(\cdot, \cdot)$ (依赖于图 $G(\bar{E}^k)$, $k = 1, 2, \dots, p$), 使得 $\|\delta(k)\| \leq \beta(\|\delta(0)\|, t) + \xi$ 成立, 其中 $\delta(k) = x(k) - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{1}_N^T \otimes I_n x(k)$.

2 主要结论

本节将研究以下两种情形: 1) 在某些时刻, 所有个体不能划分为两个敌对阵营; 2) 虽然所有个体可以划分为两个阵营, 但形成的敌对阵营中的成员会随时间改变. 如果符号图 $G(\bar{E}^k)$, $k = 1, 2, \dots, p$ 都是连通的, 那么可以得到条件使得控制输入为式 (2) 的网络 (1) 达到有界双向同步. 为此, 给出以下假设:

假设 1. 假设矩阵 A 的所有特征值是模为 1 的半单特征值, 即所有约当块都是一维的.

进而, 针对存在对抗关系和时变拓扑的耦合离散系统, 可以得到定理 1.

定理 1. 考虑网络 (1), 假定假设 1 成立且符号图 $G(\bar{E}^k)$, $k = 1, 2, \dots, p$ 连通. 如果存在 μ 使得不等式 (4) 成立 (其中 $\Delta^j = L^j - \bar{L}^j$),

$$0 < \mu \leq \min_{j \in P} \left\{ \frac{1}{(\|\Psi \bar{L}^j \Psi\| + \|\Delta^j\|) \|(\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A})\|} \right\} \quad (4)$$

那么控制输入为式 (2) 的网络 (1) 在 $K = \mu B^T P^T P A$ 时可以达到有界双向同步, 其中, $\bar{A} = P A P^{-1}$, $\bar{B} = P B$, 可逆矩阵 P 使得 \bar{A} 是 A 的约当标准型. 而且, 其最终界为 $\xi = \sqrt{\frac{\sigma_2 \|x(0)\| (1 + \sqrt{1 + \theta \alpha})}{\sigma_1 \theta \alpha}}$, 其中 $0 < \theta < 1$, $\alpha = \frac{\mu \lambda_2 \lambda_{\min}(\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A})}{2}$, $\sigma_1 = \lambda_{\min}$, $\sigma_2 = \lambda_{\max}(P^T P)$, $\lambda_2 = \min_{k=1, 2, \dots, p} \lambda_2(\bar{L}^k)$.

证明. 选择 $K = \mu B^T P^T P A$, 则控制输入为式 (2) 的网络 (1) 变为

$$x_i(k+1) = A x_i(k) + \mu B B^T P^T P A \times \sum_{j=1}^N \left[e_{ij}^{\sigma(k)} \left[\text{sgn}\left(e_{ij}^{\sigma(k)}\right) x_j(k) - x_i(k) \right] \right] \quad (5)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, N$. 式 (5) 可以写成如下所示的紧凑形式.

$$x(k+1) = \left[(I_N \otimes A) - L^{\sigma(k)} \otimes (\mu B B^T P^T P A) \right] x(k) \quad (6)$$

令 $\bar{x}(k) = (I_N \otimes P) x(k)$, 那么

$$\bar{x}(k+1) = \left((I_N \otimes \bar{A}) - L^{\sigma(k)} \otimes (\mu \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right) \bar{x}(k) \quad (7)$$

令 $V_1(\bar{x}(k)) = \frac{1}{2} \bar{x}^T(k) \bar{x}(k)$, 那么 V_1 沿着式 (7) 的差分满足

$$V_1(\bar{x}(k+1)) - V_1(\bar{x}(k)) = -\frac{\mu}{2} \bar{x}^T(k) \left(L^{\sigma(k)} \otimes (\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right) \times \left(2I_N \otimes I_n - \mu L^{\sigma(k)} \otimes (\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right) \bar{x}(k) \quad (8)$$

基于条件 (4), 可得

$$\left\| \left(2I_N \otimes I_n - \mu L^{\sigma(k)} \otimes (\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right) \right\| \geq 2 - \left\| \mu L^{\sigma(k)} \otimes (\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right\| \geq 2 - 1 = 1$$

$$V_1(\bar{x}(k+1)) - V_1(\bar{x}(k)) \leq -\frac{\mu}{2} \bar{x}^T(k) \left(L^{\sigma(k)} \otimes (\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right) \bar{x}(k) \leq 0 \quad (9)$$

即得 $V_1(\bar{x}(k))$ 是非递增的, 且有 $\|\bar{x}(k)\| \leq \|\bar{x}(0)\|$. 令 $\bar{y}(k) = (\Psi \otimes P) x(k)$, 在控制输入为式 (3) 时, 形成的闭环系统可表示为

$$\bar{y}(k+1) = \left((I_N \otimes \bar{A}) - (\Psi \bar{L}^{\sigma(k)} \Psi) \otimes (\mu \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right) \bar{y}(k) \quad (10)$$

由于图 $G(\bar{E}^k)$, $k = 1, 2, \dots, p$ 的节点 $\{i = 1, 2, \dots, N\}$ 可划分为两个敌对阵营 V_1 和 V_2 , 且图 $G(\bar{E}^k)$, $k = 1, 2, \dots, p$ 是连通的, 基于定理 1^[25], 可知网络 (1) 和 (3) 在任意切换信号下达到双向同步.

令 $z(k) = (\Psi \otimes P) x(k)$, 则控制输入为式 (2) 的网络 (1) 可表示为

$$z(k+1) = \left((I_N \otimes \bar{A}) - (\Psi L^{\sigma(k)} \Psi) \otimes (\mu \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right) z(k) \quad (11)$$

令 $z_c(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N z_j(k)$, $\bar{\delta}_i = z_i(k) - z_c(k)$, 则有 $\bar{\delta}(k) = (\Psi \otimes P) \delta(k)$, 其中 $\bar{\delta} = [\bar{\delta}_1^T \dots \bar{\delta}_N^T]^T$, 易得

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(k+1) = & \left((I_N \otimes A) - (\Psi \bar{L}^{\sigma(k)} \Psi) \otimes (\mu \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right) \times \\ & \bar{\delta}(k) - \left(\Psi \Delta^{\sigma(k)} \Psi \right) \otimes (\mu \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) z(k) \quad (12) \end{aligned}$$

令 $V_2(\bar{\delta}(k)) = \frac{1}{2} \bar{\delta}^T(k) \bar{\delta}(k)$, 那么 V_2 沿着式 (12) 的差分满足

$$\begin{aligned} V_2(\bar{\delta}(k+1)) - V_2(\bar{\delta}(k)) = & -\frac{\mu}{2} \bar{\delta}^T(k) \left(\Psi \bar{L}^{\sigma(k)} \Psi \otimes (\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right) \times \\ & \left(2I_N \otimes I_n - \mu \Psi \bar{L}^{\sigma(k)} \Psi \otimes (\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right) \bar{\delta}(k) - \\ & \bar{\delta}^T(k) \left((I_N \otimes \bar{A}^T) - (\Psi \bar{L}^{\sigma(k)} \Psi) \otimes (\mu \bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T) \right) \times \\ & \left(\Psi \Delta^{\sigma(k)} \Psi \right) \otimes (\mu \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) z(k) + \\ & z^T(k) \left(\Psi \Delta^{\sigma(k)} \Psi \right)^2 \otimes (\mu \bar{B} \bar{B}^T \bar{A})^2 z(k) \leq \\ & -\frac{\mu}{2} \bar{\delta}^T(k) \left(\Psi \bar{L}^{\sigma(k)} \Psi \otimes (\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right) \bar{\delta}(k) + \\ & 2 \|\bar{\delta}(k)\| \|z(k)\| + \|z(k)\|^2 \end{aligned}$$

其中, 不等式第 1 部分可由条件 (4) 得到. 由于图 $G(\bar{E}^k)$, $k = 1, 2, \dots, p$ 是连通的, 因而存在正交矩阵 $Q^{\sigma(k)} \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 使得

$$\begin{aligned} (Q^{\sigma(k)})^T (\Psi \bar{L}^{\sigma(k)} \Psi) Q^{\sigma(k)} = & \\ \text{diag} \{ \lambda_1^{\sigma(k)}, \lambda_2^{\sigma(k)}, \dots, \lambda_N^{\sigma(k)} \} & \end{aligned}$$

其中, $0 = \lambda_1^{\sigma(k)} < \lambda_2^{\sigma(k)} \leq \dots \leq \lambda_N^{\sigma(k)}$, $Q^{\sigma(k)} = [q_1^{\sigma(k)}, q_2^{\sigma(k)}, \dots, q_N^{\sigma(k)}]$, $q_1^{\sigma(k)} = \frac{1}{\sqrt{N}}$ 是特征值 $\lambda_1^{\sigma(k)} = 0$ 对应的特征向量. 令 $\hat{\delta}(k) = (Q^{\sigma(k)} \otimes I_n) \bar{\delta}(k)$, 由 $((Q^{\sigma(k)})^T \otimes I_n)(Q^{\sigma(k)} \otimes I_n) = I_{nN}$, 可得 $\bar{\delta}^T \bar{\delta} = \hat{\delta}^T \hat{\delta}$. 又由于 $\bar{\delta}_1 = (q_1^{\sigma(k)} \otimes I_n) \hat{\delta}(k) = 0$, 则可得

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \bar{\delta}^T(k) (\Psi \bar{L}^{\sigma(k)} \Psi \otimes (\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A})) \bar{\delta}(k) = & \\ \frac{\mu}{2} \hat{\delta}^T(k) \left((Q^{\sigma(k)})^T \Psi \bar{L}^{\sigma(k)} \Psi Q^{\sigma(k)} \otimes (\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right) \times & \\ \hat{\delta}(k) = \frac{\mu}{2} \hat{\delta}^T(k) \times & \\ \left(\text{diag} \{ \lambda_1^{\sigma(k)}, \lambda_2^{\sigma(k)}, \dots, \lambda_N^{\sigma(k)} \} \otimes (\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \right) \times & \\ \hat{\delta}(k) \geq \frac{\mu \lambda_2}{2} \hat{\delta}^T(k) (\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) \hat{\delta}(k) \geq & \\ \frac{\mu \lambda_2 \lambda_{\min}(\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A})}{2} \|\bar{\delta}(k)\|^2 = & \\ \alpha \|\bar{\delta}(k)\|^2 & \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} V(\bar{\delta}(k+1)) - V(\bar{\delta}(k)) \leq & \\ -\frac{\mu}{2} \bar{\delta}^T(k) (\Psi \bar{L}^{\sigma(k)} \Psi \otimes (\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A})) \bar{\delta}(k) + & \\ 2 \|\bar{\delta}(k)\| \|z(k)\| + \|z(k)\|^2 = & \\ - (1-\theta) \alpha \|\bar{\delta}(k)\|^2 - \theta \alpha \|\bar{\delta}(k)\|^2 + & \\ 2 \|\bar{\delta}(k)\| \|z(k)\| + \|z(k)\|^2 & \quad (13) \end{aligned}$$

其中, $0 < \theta < 1$. 所以下面的关系成立:

$$\begin{aligned} -\theta \alpha \|\bar{\delta}(k)\|^2 + 2 \|\bar{\delta}(k)\| \|z(k)\| + \|z(k)\|^2 \leq 0 \Rightarrow & \\ V_2(\bar{\delta}(k+1)) - V_2(\bar{\delta}(k)) \leq - (1-\theta) \alpha \|\bar{\delta}(k)\|^2 & \quad (14) \end{aligned}$$

由 $\delta(k) = (\Psi \otimes P^{-1}) \bar{\delta}(k) z(k) = (\Psi \otimes I_n) \bar{x}(k) = (\Psi \otimes P) x(k)$, $\|\bar{x}(k)\| \leq \|\bar{x}(0)\|$, 可得 $\lambda_{\min}(P^T P) \times \|\delta(k)\|^2 \leq \|\bar{\delta}(k)\|^2 \leq \lambda_{\max}(P^T P) \|\delta(k)\|^2$ 以及 $\|z(k)\|^2 \leq \lambda_{\max}(P^T P) \|x(0)\|^2$. 若不等式条件 (15) 成立, 则式 (14) 的左边部分成立.

$$\begin{aligned} -\theta \alpha \|\bar{\delta}(k)\|^2 + 2\sqrt{\sigma_2} \|x(0)\| \|\bar{\delta}(k)\| + & \\ \sigma_2 \|x(0)\|^2 \leq 0 & \quad (15) \end{aligned}$$

当式 (16) 成立时, 式 (15) 成立.

$$\|\bar{\delta}(k)\| \geq \frac{\sqrt{\sigma_2} \|x(0)\| (1 + \sqrt{1 + \theta \alpha})}{\theta \alpha} \quad (16)$$

因此, 对于 $\forall \|\bar{\delta}(k)\| \geq \frac{\sqrt{\sigma_2} \|x(0)\| (1 + \sqrt{1 + \theta \alpha})}{\theta \alpha}$,

$$V_2(\bar{\delta}(k+1)) - V_2(\bar{\delta}(k)) \leq - (1-\theta) \alpha \|\bar{\delta}(k)\|^2 \quad (17)$$

为了应用引理 1 (证明见附录 B), 取 $c_1 = c_2 = 1/2$, $c_3 = - (1-\theta) \alpha$, $c = \frac{\sqrt{\sigma_2} \|x(0)\| (1 + \sqrt{1 + \theta \alpha})}{\theta \alpha}$. 因此, 存在正常数 $\rho \geq 1$, $0 < \gamma < 1$, 使得对于每个初始状态 $x(0)$, 网络 (1) 和 (2) 的解满足

$$\begin{aligned} \|\bar{\delta}(k)\| \leq \rho \|\bar{\delta}(0)\| \gamma^k + \frac{\sqrt{\sigma_2} \|x(0)\| (1 + \sqrt{1 + \theta \alpha})}{\theta \alpha}, & \\ \forall k \geq 0 & \quad (18) \end{aligned}$$

由于 $\sigma_1 \|\delta(0)\|^2 \leq \|\bar{\delta}(0)\|^2 \leq \sigma_2 \|\delta(0)\|^2$, 可得

$$\begin{aligned} \|\delta(k)\| \leq \rho \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \|\delta(0)\| \gamma^k + & \\ \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \frac{\|x(0)\| (1 + \sqrt{1 + \theta \alpha})}{\theta \alpha}, & \\ \forall k \geq 0 & \quad (19) \end{aligned}$$

从而得到控制输入为式 (2) 的网络 (1) 达到有界双向同步. \square

注 2. 由定理 1 的证明过程可以看出, 最终界为 $\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \frac{\|x(0)\| (1 + \sqrt{1 + \theta \alpha})}{\theta \alpha}$. 因此, 为了使最终界比较小, 可

以选择使 $\|x(0)\|$ 很小或者 α 很大的初始条件.

注 3. 在定理 1 中, 假设矩阵 A 的所有特征值是模为 1 的半单特征值, 即所有约当块都是一维的. 在这种假设条件下, 矩阵 A 是正交矩阵, 即 $A^T A = I$. 这时矩阵 A 是中立稳定的.

3 数值例子

本节将给出一个数值例子来验证所得结论的有效性.

例 1. 对于网络 (1), 令 $N = 4$, 其中矩阵 A, B 为

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (20)$$

因为矩阵 A 是正交的, 所以假设 1 成立. 定义切换信号 $\sigma(k)$ 如式 (21), 其中 $s \in \mathbf{Z}^+$.

$$\sigma(k) = \begin{cases} 1, & k = 4s + 1 \text{ 或 } 4s + 2 \\ 2, & k = 4s + 3 \text{ 或 } 4s + 4 \end{cases} \quad (21)$$

假设有两个无向图 $G(E^i), i = 1, 2$, 如图 1 所示, 图 $G(E^2)$ 的节点不能划分为两个敌对阵营 V_1 和 V_2 . 假设 $G(\bar{E}^1)$ 和 $G(\bar{E}^2)$ 分别对应于图 2(a) 和图 2(b). 可知图 $G(\bar{E}^i), i = 1, 2$ 的节点能划分为两个敌对阵营 $V_1 = \{1, 2\}, V_2 = \{3, 4\}$.

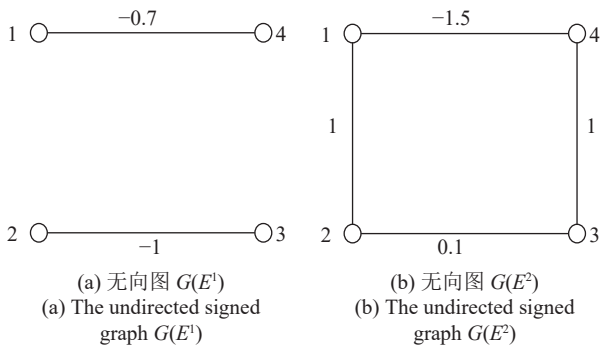


图 1 无向图 $G(E^i), i = 1, 2$
Fig.1 The undirected signed graph $G(E^i), i = 1, 2$

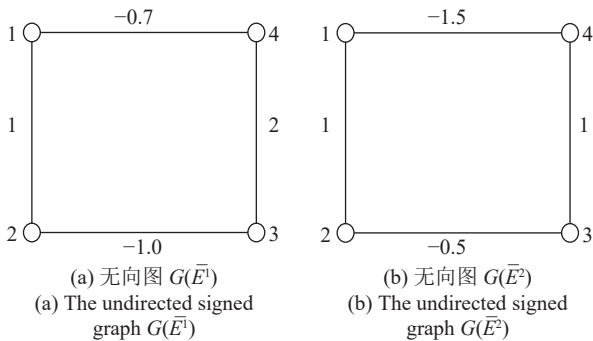


图 2 无向图 $G(\bar{E}^i), i = 1, 2$
Fig.2 The undirected signed graph $G(\bar{E}^i), i = 1, 2$

对于图 $G(\bar{E}^i), i = 1, 2$, 可选择符号矩阵 $\Psi = \text{diag}\{1, 1, -1, -1\}$ 使得 $\Psi \bar{E}^k \Psi, k = 1, 2$ 是非负矩阵, 根据其拉普拉斯矩阵 \bar{L}^1 和 \bar{L}^2

$$\bar{L}^1 = \begin{bmatrix} 1.7 & -1 & 0 & 0.7 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0.7 & 0 & -2 & 2.7 \end{bmatrix}$$

$$\bar{L}^2 = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 & 0 & 1.5 \\ -1 & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1.5 & -1 \\ 1.5 & 0 & -1 & 2.5 \end{bmatrix}$$

可得 $\lambda_2 = \min_{k=1,2} \lambda_2(\bar{L}^k) = 1.5858$. 又由于 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1, \lambda_{\min}(\bar{A}^T \bar{B} \bar{B}^T \bar{A}) = 3.5570$. 如果选择 $\mu = 0.1, \theta = 0.9, \alpha = 0.2820, \xi = 0.6272$, 那么图 $G(\bar{E}^i), i = 1, 2$ 描述的网络 (1) 和 (3) 在切换信号 $\sigma(k)$ 下的状态演变如图 3 所示, 可知该网络达到双向同步. 对于网络 (1), 在

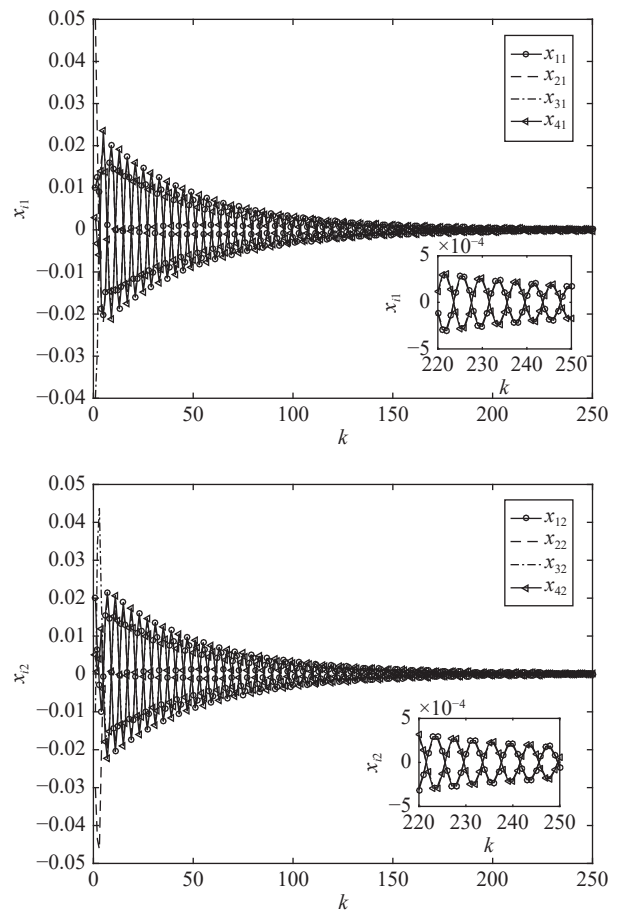


图 3 四智能体网络在拓扑为图 2、切换信号为 $\sigma(k)$ 时的时间演变过程

Fig.3 Time evolution of 4-agent network with topologies in Fig.2 and switching signal $\sigma(k)$

图 $G(E^i)$, $i = 1, 2$ 和切换信号 $\sigma(k)$ 下的时间演变图如图 4 所示, 根据定理 1, 控制输入为式 (2) 的网络 (1) 能达到有界双向同步, 且终值为 $\xi = 0.6272$. 在图 5 中, 明确地描述了范数误差和最终界.

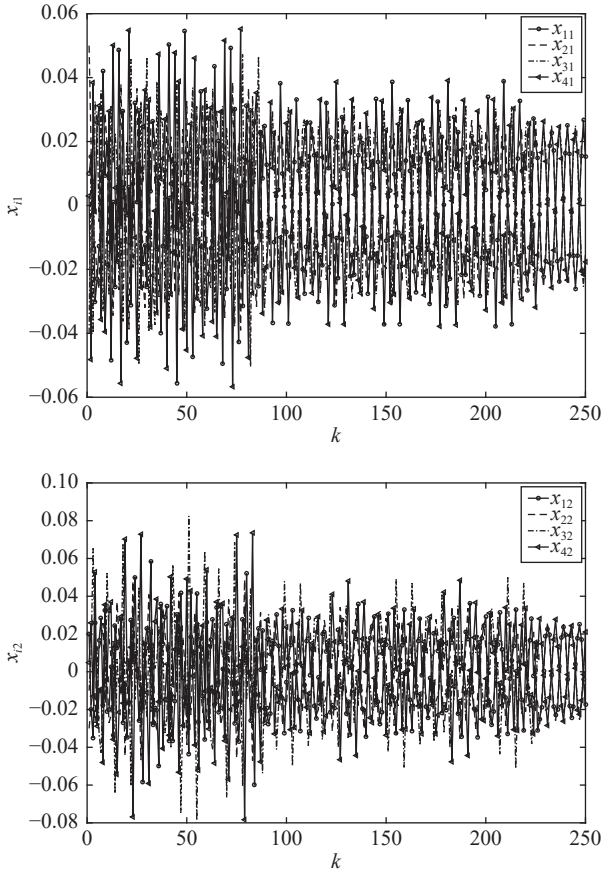


图 4 四智能体网络在拓扑为图 1、切换信号为 $\sigma(k)$ 时的时间演变过程

Fig.4 Time evolution of 4-agent network with topologies in Fig.1 and switching signal $\sigma(k)$

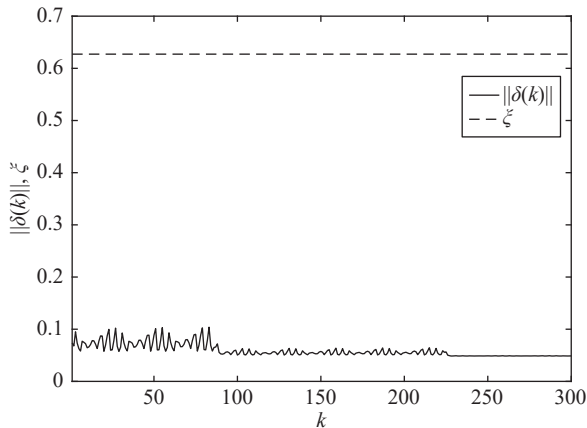


图 5 四智能体网络在切换信号 $\sigma(k)$ 下的范数误差和终值
Fig.5 Norm error of the 4-agent network with switching signal $\sigma(k)$

4 结论

当存在对抗关系和切换拓扑时, 本文研究了耦合离散线性系统的同步问题. 针对实际中可能存在的两种情形, 研究了耦合离散系统的有界双向同步问题, 得到了使闭环系统在任意切换信号下达到有界双向同步的充分条件. 数值仿真验证了本文所得理论的正确性. 本文的结论对于系统矩阵有一定的要求, 后续工作将考虑更一般的情况.

附录 A 符号图

符号图 $G(V, \varepsilon)$ 由一个有限节点集和一个边集组成, 节点集记为 $V = \{1, 2, \dots, N\}$, 边集记为 $\varepsilon = \{(i, j) : i \neq j, i, j \in V\} \subseteq V \times V$. 令 $E = (e_{ij})$ 是图 G 的一个邻接矩阵, 利用 $G(E)$ 来表示邻接矩阵为 E 的符号图, 图 $G(E)$ 的拉普拉斯矩阵定义为 $L = C_r - E$, 其中 $C_r = \text{diag}\{\sum_{j=1}^N |e_{1j}|, \dots, \sum_{j=1}^N |e_{Nj}|\}$. 由 i 到 j 的边 $(i, j) \in \varepsilon$ 是有向边, 其中节点 i, j 分别称为父节点和子节点. 如果 $(j, i), (i, j) \in \varepsilon$, 那么图 $G(E)$ 是无向图. 文中定义 $\varepsilon^+ = \{(i, j) | e_{ij} > 0\}$, $\varepsilon^- = \{(i, j) | e_{ij} < 0\}$, $\varepsilon = \varepsilon^+ \cup \varepsilon^-$. 由不同节点 $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_{l-1}, i_l)$ 所组成的边的一个序列称为路径 (路径长度为 $l - 1$). 若符号图中的任意两个不同节点之间存在路径, 则该图称为是强连通的. 已知包含相同节点集的 p 个符号图 $G(E^k) = (V, \varepsilon_k, E^k)$, $k = 1, 2, \dots, p$, 则在切换信号 $\sigma(k)$ 下, 可以定义一个时变符号图, 即 $G(E^{\sigma(k)}) = (V, \varepsilon^{\sigma(k)}, E^{\sigma(k)})$.

附录 B 预备引理

考虑如下差分方程

$$x(k+1) = f(x(k)) \tag{B1}$$

其中, $x \in \mathbf{R}^n$, $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是连续的, $f(0) = 0$.

引理 1. 令 $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是一个连续函数, 且满足

$$c_1 \|x(k)\|^2 \leq V(x(k)) \leq c_2 \|x(k)\|^2 \tag{B2}$$

$$\Delta V(x(k)) \leq -c_3 \|x(k)\|^2, \quad \forall \|x(k)\| \geq c \geq 0 \tag{B3}$$

其中, $\forall k \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}^n$, c, c_1, c_2, c_3 是正常数. 那么, 对每个初始状态 $x(0)$, 存在正常数 $\rho \geq 1, 0 < \gamma < 1$, 有 $T \geq 0$ (取决于 $x(0)$ 和 c), 使得系统 (B1) 的解满足

$$\|x(k)\| \leq \rho \|x(0)\| \gamma^k, \quad \forall 0 \leq k \leq T \tag{B4}$$

$$\|x(k)\| \leq \frac{c c_2}{c_1}, \quad \forall t \geq T \tag{B5}$$

证明. 本引理证明类似于定理 4.18^[26] 的证明. 令 $\Omega_c = \{x \in \mathbf{R}^n | V(x) \leq c\}$, 若初始 $x(0) \in \Omega$, 则系统 (B1) 的解依赖于 Ω_c , 这是因为 $V(x(k))$ 在边界上是负的. 对于 $\mathbf{R}^n - \Omega_c$ 内部的某个解, 令 T 是它进入 Ω_c 的起始时刻, 则对于所有的

$k \in [0, T] \cap \mathbf{Z}^+$, 有下式成立:

$$\Delta V(x(k)) \leq -c_3 \|x(k)\|^2 \leq -\frac{c_3}{c_2} V(x(k))$$

因此,

$$V(x(k+1)) \leq \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right) V(x(k)) \leq \dots \leq \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^k V(x(0))$$

又由于 $V(x(k)) \geq 0$, 易得 $c_3/c_2 < 1$. 所以 $(1 - c_3/c_2) < 1$. 可以得到

$$\|x(k)\| \leq \left(\frac{V(x(k))}{c_1}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left[\frac{1}{c_1} \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^k c_2 \|x(0)\|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \sqrt{\left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^k} \|x(0)\|$$

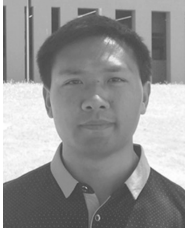
令 $\rho = \sqrt{c_2/c_1}$, $\gamma = \sqrt{1 - c_3/c_2}$, 则可以得到

$$\|x(k)\| \leq \rho \|x(0)\| \gamma^k, \quad \forall 0 \leq k \leq T \quad \square$$

References

- Ren W, Beard R W. *Distributed Consensus in Multi-Vehicle Cooperative Control*. Berlin, Germany: Springer, 2008.
- Mesbahi M, Egerstedt M. *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. USA: Princeton University Press, 2010.
- Chen Guan-Rong. Problems and challenges in control theory under complex dynamical network environments. *Acta Automatica Sinica*, 2013, **39**(4): 312–321
(陈关荣. 复杂动态网络环境下控制理论遇到的问题与挑战. 自动化学报, 2013, **39**(4): 312–321)
- Xu Jun, Zhang Guo-Liang, Zeng Jing, Sun Qiao, Yang Fan. Robust guaranteed cost consensus for high-order discretetime multi-agent systems with switching topologies and time delays. *Acta Automatica Sinica*, 2019, **45**(2): 360–373
(徐君, 张国良, 曾静, 孙巧, 羊帆. 具有时延和切换拓扑的高阶离散时间多智能体系统鲁棒保性能一致性. 自动化学报, 2019, **45**(2): 360–373)
- Xu J, Zhang G L, Zeng J, Du B Y, Jia X. Robust H_∞ consensus control for high-order discrete-time multi-agent systems with parameter uncertainties and external disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(10): 1850–1857
- Altafni C. Dynamics of opinion forming in structurally balanced social networks. *PLoS ONE*, 2012, **7**(6): e38135
- Lee S H. Predator's attack-induced phase-like transition in prey flock. *Physics Letters A*, 2006, **357**(4): 270–274
- Grossberg S. Competition, decision, and consensus. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1978, **66**(2): 470–493
- Chen C C, Wan Y H, Chung M C, Sun Y C. An effective recommendation method for cold start new users using trust and distrust networks. *Information Sciences*, 2013, **224**: 19–36
- Altafni C. Consensus problems on networks with antagonistic interactions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, **58**(4): 935–946
- Valcher M E, Misra P. On the consensus and bipartite consensus in high-order multi-agent dynamical systems with antagonistic interactions. *Systems and Control Letters*, 2014, **66**: 94–103
- Zhang H W, Chen J. Bipartite consensus of linear multiagent systems over signed digraphs: An output feedback control approach. In: *Proceeding of the 19th World Congress, Cape Town, South Africa: IFAC*, 2014, 4681–4686
- Hu J P, Zheng W X. Emergent collective behaviors on competition networks. *Physics Letters A*, 2014, **378**(26): 1787–1796
- Fan M C, Zhang H T, Wang M. Bipartite flocking for multiagent systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, **19**(9): 3313–3322
- Meng D Y, Du M J, Jia Y M. Interval bipartite consensus of networked agents associated with signed digraphs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, **61**(12): 3755–3770
- Guo X, Lu J Q, Alsaedi A, Alsaedi F E. Bipartite consensus for multi-agent systems with antagonistic interactions and communication delays. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2018, **495**: 488–497
- Zhai S D, Li Q D. Bipartite synchronization in a network of nonlinear systems: a contraction approach. *Journal of the Franklin Institute*, 2016, **353**(17): 4602–4619
- Liu J, Chen X D, Başar T, Belabbas M A. Exponential convergence of the discrete-and continuous-time Altafni models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(12): 6168–6182
- Liang J Q, Meng D Y. Quasi-interval bipartite consensus problems on discrete-time signed networks. In: *Proceedings of the 2018 Chinese Intelligent Systems Conference*. Singapore, Singapore: Springer, 2019. 11–20
- Proskurnikov A V, Tempo R. A tutorial on modeling and analysis of dynamic social networks. Part I. *Annual Reviews in Control*, 2017, **43**: 65–79
- Proskurnikov A V, Tempo R. A tutorial on modeling and analysis of dynamic social networks. Part II. *Annual Reviews in Control*, 2018, **45**: 166–190
- Altafni C, Lini G. Predictable dynamics of opinion forming for networks with antagonistic interactions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(2): 342–357
- Zhai S D. Modulus synchronization in a network of nonlinear systems with antagonistic interactions and switching topologies. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, **33**: 184–193

- 24 Zhai S D, Li Q D. Pinning bipartite synchronization for coupled nonlinear systems with antagonistic interactions and switching topologies. *Systems and Control Letters*, 2016, **94**: 127–132
- 25 Zhai S D, Liu P. Synchronization of coupled discrete systems with competitive interactions and time-varying topologies. In: Proceedings of the 37th Chinese Control Conference (CCC). Wuhan, China: IEEE, 2018. 6896-6901
- 26 Khalil H K. *Nonlinear Systems*. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.



翟世东 重庆邮电大学自动化学院副教授。2014 年获得华中科技大学博士学位。主要研究方向为非线性系统控制, 复杂网络动力学与控制。本文通信作者。

E-mail: zhaisd@cqupt.edu.cn

(**ZHAI Shi-Dong** Associate professor

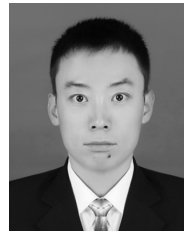
at the School of Automation, Chongqing University of Posts and Telecommunications. He received his Ph.D. degree from Huazhong University of Science and Technology in 2014. His research interest covers nonlinear system control, and dynamics of complex network and control. Corresponding author of this paper.)



刘佩 重庆邮电大学自动化学院硕士研究生。2017 年获得重庆邮电大学学士学位。主要研究方向为复杂网络同步。E-mail: LP2017014@163.com

(**LIU Pei** Master student at the School of Automation, Chongqing University of Posts and Telecom-

munications. She received her bachelor degree from Chongqing University of Posts and Telecommunications in 2017. Her main research interest is synchronization of complex network.)



高辉 重庆邮电大学自动化学院硕士研究生。2018 年获得陕西理工大学学士学位。主要研究方向为复杂网络控制。

E-mail: s180331089@stu.cqupt.edu.cn

(**GAO Hui** Master student at the School of Automation, Chongqing

University of Posts and Telecommunications. He received his bachelor degree from Shaanxi University of Technology in 2018. His main research interest is control of complex network.)