

# 有界扰动下约束非线性系统鲁棒经济模型预测控制

何德峰<sup>1</sup> 韩平<sup>1</sup> 王青松<sup>1</sup>

**摘要** 针对未知但有界扰动下约束非线性系统, 提出一种新的鲁棒经济模型预测控制 (Economic model predictive control, EMPC) 策略, 保证闭环系统对扰动输入具有输入到状态稳定性 (Input-to-state stability, ISS). 基于微分对策原理, 分别优化经济目标函数和关于最优经济平衡点的鲁棒稳定性目标函数, 其中经济最优性与鲁棒稳定性是具有冲突的两个控制目标. 利用鲁棒稳定性目标最优值函数构造 EMPC 优化的隐式收缩约束, 建立鲁棒 EMPC 的递推可行性和闭环系统关于最优经济平衡点相对于有界扰动输入到状态稳定性结果. 最后以连续搅拌反应器为例, 对比仿真验证本文策略的有效性.

**关键词** 模型预测控制, 非线性系统, 经济优化, 微分对策, 输入到状态稳定性

**引用格式** 何德峰, 韩平, 王青松. 有界扰动下约束非线性系统鲁棒经济模型预测控制. 自动化学报, 2022, 48(2): 572–581

**DOI** 10.16383/j.aas.c190879

## Robust Economic MPC of Constrained Nonlinear Systems With Bounded Disturbances

HE De-Feng<sup>1</sup> HAN Ping<sup>1</sup> WANG Qing-Song<sup>1</sup>

**Abstract** This paper proposes a novel robust economic model predictive control (EMPC) scheme of constrained nonlinear systems with unknown but bounded disturbances, with guaranteed input-to-state stability (ISS) of the closed-loop system with respect to the disturbance. Based on the principle of differential game, economic objective functions and robust stability objective functions on economically optimal equilibrium points are optimized simultaneously, which are two conflicting control goals. The optimal value function of the robust objective is used to design an implicit contractive constraint of the EMPC optimization, which guarantees ISS of the closed-loop system at the equilibrium point with respect to the disturbance. Some sufficient conditions for recursive feasibility and ISS with respect to the disturbance are presented. Finally, an example of a continuously stirred tank reactor is utilized to illustrate the effectiveness of the proposed scheme.

**Key words** Model predictive control (MPC), nonlinear systems, economic optimization, differential game, input-to-state stability (ISS)

**Citation** He De-Feng, Han Ping, Wang Qing-Song. Robust economic MPC of constrained nonlinear systems with bounded disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2022, 48(2): 572–581

近年来, 经济模型预测控制 (Economic model predictive control, EMPC) 在工业界和学术界引起了广泛关注<sup>[1-2]</sup>. 作为一种新近发展的先进控制技术, EMPC 有望成为解决复杂系统节能、降耗和增效优化控制问题的重要手段, 目前已应用于能源、造纸、车辆等系统的能效优化控制<sup>[3-9]</sup>. 除具有常规模型预测控制 (Model predictive control, MPC) 的显式处理约束和多变量控制的优点外, EMPC 还能

优化“经济”类目标函数, 通常这类函数不是设定值跟踪偏差的正定函数, 而是系统状态和控制变量的非凸或非正定函数<sup>[1-9]</sup>. 因此, 把以设定值跟踪偏差的正定函数为优化目标的常规 MPC 称为目标跟踪 MPC, 而不以跟踪偏差的正定函数为优化目标的 MPC 统称为经济 MPC<sup>[2]</sup>. 现有研究表明: 经济最优性目标与闭环系统的稳定性目标具有一定的冲突性<sup>[1-2]</sup>, 因此近年来 EMPC 的稳定性综合策略得到了广泛研究.

为建立 EMPC 关于经济平衡点的稳定性, 一种主要方法是构造基于经济优化目标函数的 Lyapunov 函数<sup>[5, 10-17]</sup>. 例如, 使用终端等式约束和强对偶性假设, 定义经济目标函数的旋转代价函数并将其作为闭环系统的一个 Lyapunov 函数<sup>[10]</sup>, 而引入广义终端等式约束<sup>[15]</sup>, 建立了经济性能变化下的递推可行性与闭环系统的有界稳定性<sup>[11]</sup>. 进一步, 采用严格耗散性条件、终端不等式约束和终端代价函数

收稿日期 2019-12-23 录用日期 2020-04-06

Manuscript received December 23, 2019; accepted April 6, 2020

国家自然科学基金 (61773345), 浙江省自然科学基金 (LR17F030004) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (61773345) and Natural Science Foundation of Zhejiang Province (LR17F030004)

本文责任编辑 刘艳军

Recommended by Associate Editor LIU Yan-Jun

1. 浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023

1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023

代替, 降低了 EMPC 稳定性综合策略的保守性<sup>[12-13]</sup>. 在无终端约束 EMPC 策略中, 闭环轨迹在足够长的预测时域情况下收敛到平衡点的邻域<sup>[16-17]</sup>. 虽然无终端约束增大了闭环系统的吸引域, 但长时域预测将大大增加了在线优化的计算负担. 进一步, EMPC 稳定性和经济性是一对存在冲突的控制目标<sup>[18-19]</sup>, 且稳定性和经济性目标无法统一定量, 难以通过权重标定. 对此, 从多目标优化控制角度, 考虑非线性系统强对偶性或耗散性条件难以满足情况, 文献 [20-21] 通过构造稳定性收缩约束, 建立闭环系统关于最优经济平衡点的渐近稳定性.

实际系统总是存在不确定扰动, 现有 EMPC 策略通常难以保证受扰系统的可行性和稳定性. 对于目标跟踪 MPC, 目前已有较多鲁棒稳定性结果<sup>[22-32]</sup>, 主要包括本质鲁棒 MPC<sup>[22]</sup>、Tube 鲁棒 MPC<sup>[24-25]</sup> 以及 min-max MPC<sup>[26-32]</sup> 等, 其中 min-max MPC 采用微分对策原理, 在使最坏扰动输入情况下系统的性能指标上界达到最小. 相比于本质鲁棒 MPC 和 Tube 鲁棒 MPC, min-max MPC 能大大降低鲁棒 MPC 的保守性, 但会增加优化问题的在线计算量<sup>[1]</sup>. 为降低 min-max MPC 的在线计算量, 文献 [30] 采用仿射输入结构, 使 MPC 含有抑制扰动的闭环成分和易于求解的开环优化. 另一方面, 输入到状态稳定性 (Input-to-state stability, ISS) 成为分析不确定系统鲁棒稳定性的一个有效工具<sup>[23, 27-32]</sup>, 并应用到了 EMPC 鲁棒性研究, 如文献 [33-34] 采用强对偶性假设和约束紧缩方法, 证明了周期性扰动下线性系统 EMPC 闭环收敛性, 文献 [35] 获得了非线性系统 EMPC 的有界稳定性结果, 提高了经济性能优化的灵活性, 文献 [36] 将稳定性目标和经济性目标相加, 证明 EMPC 线性系统关于经济目标的最大值是 ISS 的, 文献 [37] 施加保证鲁棒稳定性的显式收缩约束, 提出两种非线性系统鲁棒 EMPC 算法, 文献 [38] 提出 Lipschitz 连续非线性系统的隐式收缩鲁棒 EMPC 策略, 提高了系统的平均经济性能.

本文针对含有未知有界扰动的不确定非线性系统, 提出一种新的具有递推可行性以及 ISS 保证的鲁棒 EMPC 策略. 该策略明确考虑经济最优性和鲁棒稳定性控制目标的矛盾特点, 采用微分对策原理在线滚动优化计算这对冲突目标的 min-max 问题. 离线计算最优经济平衡点, 并利用状态与该平衡点的偏差定义鲁棒稳定性目标函数, 而经济目标函数则由系统的经济性能给定. 通过特殊设计 EMPC 优化问题的隐式收缩约束, 并在鲁棒稳定性目标优化问题中引入一个新约束, 保证 EMPC 优化的递推可行性和闭环系统关于不确定扰动输入的 ISS. 相比现有鲁棒 EMPC 策略, 本文首先建立了

约束非线性系统具有 ISS 的鲁棒 EMPC 策略; 其次, EMPC 递推可行性和鲁棒稳定性无需强对偶性或耗散性假设条件, 从而扩大了鲁棒 EMPC 的应用范围; 最后, 采用微分对策原理得到了保守性更低的容许扰动上界. 采用一个受扰非线性连续搅拌釜反应器 (Continuous stirred tank reactor, CSTR) 的仿真实例, 验证本文提出策略的有效性 with 优越性.

符号说明:  $\mathbf{Z}^+$  表示非负整数集,  $\mathbf{I}_{a:b}$  表示集合  $\{i \in \mathbf{Z}^+ : a \leq i \leq b, a \in \mathbf{Z}^+, b \in \mathbf{Z}^+\}$ ,  $\mathbf{I}_{\geq j}$  表示集合  $\{i \in \mathbf{Z}^+ : i \geq j, j \in \mathbf{Z}^+\}$ .  $\mathbf{x}^+$  表示  $\mathbf{x}$  的下一时刻状态,  $|\mathbf{x}|$  表示  $\mathbf{x}$  的欧几里得范数,  $\|\mathbf{x}\| = \sup\{|\mathbf{x}(k)|, k \in \mathbf{Z}^+\}$ ,  $\mathbf{x}(i|k)$  表示在第  $k$  时刻对未来第  $k+i$  时刻的预测变量. 连续函数  $h_1: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  称为  $K$  类函数系指该函数单调递增, 且  $h_1(0) = 0$ ; 函数  $h_2: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  称为  $K_\infty$  类函数系指该函数是  $K$  类函数, 且当  $s \rightarrow \infty$  时, 有  $h(s) \rightarrow \infty$ ; 函数  $h_3: \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  称为  $KL$  函数系指对于任意固定的  $t \geq 0$ ,  $h_3(\cdot, t)$  是  $K$  类函数, 而对于任意固定的  $s > 0$ ,  $h_3(s, \cdot)$  是单调递减, 且当  $t \rightarrow \infty$  时,  $h_3(s, t) \rightarrow 0$ .

## 1 问题描述

考虑不确定离散时间非线性系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = f_1(\mathbf{x}(k)) + f_2(\mathbf{x}(k))\mathbf{u}(k) + f_3(\mathbf{x}(k))\mathbf{w}(k) \\ \mathbf{z}(k) = \begin{bmatrix} g(\mathbf{x}(k)) \\ \mathbf{u}(k) \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbf{Z}^+ \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{w}(k) \in \mathbf{R}^q$  和  $\mathbf{z}(k) \in \mathbf{R}^s$  分别表示系统在  $k$  时刻的状态、控制输入、扰动输入和辅助输出. 假设  $f_1(\cdot)$ ,  $f_2(\cdot)$ ,  $f_3(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  分别为定义在  $\mathbf{R}^n$  上的光滑函数, 满足  $f_1(0) = 0$ ,  $f_2(0) = 0$ ,  $f_3(0) = 0$  以及  $g(0) = 0$ . 系统 (1) 在  $k$  时刻的状态  $\mathbf{x}(k) = \varphi(k; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  由初始状态  $\mathbf{x}_0$ , 控制序列  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \dots\}$  和扰动序列  $\mathbf{w} = \{\mathbf{w}(0), \mathbf{w}(1), \dots\}$  表示. 假设系统 (1) 的状态完全可测, 且系统状态和控制输入满足约束

$$\mathbf{x}(k) \in X, \mathbf{u}(k) \in U, k \in \mathbf{Z}^+ \quad (2)$$

其中, 集合  $X \subset \mathbf{R}^n$  和  $U \subset \mathbf{R}^m$  均为凸的紧集, 且它们内部包含某些平衡点  $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$ .

**假设 1.** 扰动输入  $\mathbf{w}$  满足如下约束

$$\mathbf{w}(k) \in W, k \in \mathbf{Z}^+ \quad (3)$$

其中,  $W$  为包含平衡点  $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$  的紧集. 满足约束 (3) 的扰动称为容许扰动. 注意  $\mathbf{w}$  表示参数不确定性、模型失配以及持续外部扰动等多种有界不确定性<sup>[29]</sup>, 其上界表示为  $\|\mathbf{w}\| = \sup\{|\mathbf{w}_t| : \mathbf{w}_t \in W, t \in \mathbf{Z}^+\}$ .

考虑系统 (1) 的经济性能函数  $L_e: X \times U \rightarrow \mathbf{R}$ , 基于系统 (1) 的名义模型  $\mathbf{x}^+ = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})\mathbf{u}$  离线计算如下最优经济平衡点

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_e^*, \mathbf{u}_e^*) &= \arg \min_{\mathbf{x}, \mathbf{u}} L_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \text{s.t. } \mathbf{x} &= f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})\mathbf{u} \\ \mathbf{x} &\in X, \mathbf{u} \in U \end{aligned} \quad (4)$$

不失一般性, 后文假设系统 (1) 的最优经济平衡点为原点.

下面介绍输入到状态稳定 (ISS) 相关理论, 首先回顾鲁棒不变集的概念. 考虑一般离散不确定非线性系统  $\mathbf{x}^+ = f(\mathbf{x}, \mathbf{w})$ .

**定义 1**<sup>[27]</sup>. 考虑系统  $\mathbf{x}^+ = f(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  和集  $\Theta \subseteq \mathbf{R}^n$ , 如果对于任意  $\mathbf{x} \in \Theta$  和  $\mathbf{w} \in W$ , 该系统满足  $\mathbf{x}^+ = f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \in \Theta$ , 则称  $\Theta$  为该系统的鲁棒不变集.

**定义 2**<sup>[27]</sup>. 考虑系统  $\mathbf{x}^+ = f(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  及其内含原点的鲁棒不变集  $\Theta \subseteq X$ , 如果对于任意初始状态  $\mathbf{x}_0 \in \Theta$  及  $\mathbf{w} \in W$ , 存在  $K_\infty$  类函数  $\alpha$  和  $KL$  类函数  $\beta$  使系统满足

$$|\varphi(k; \mathbf{x}_0, \mathbf{w})| \leq \beta(|\mathbf{x}_0|, k) + \alpha(\|\mathbf{w}\|), \quad \forall k \in \mathbf{Z}^+ \quad (5)$$

则该系统在  $\Theta$  内是 ISS 的.

**引理 1**<sup>[29]</sup>. 考虑系统  $\mathbf{x}^+ = f(\mathbf{x}, \mathbf{w})$  及其内含原点的鲁棒不变集  $\Theta \subseteq X$ , 如果对于任意  $\mathbf{x} \in \Theta$  和  $\mathbf{w} \in W$ , 存在连续函数  $V: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^+$  满足

$$\begin{aligned} \xi_1(|\mathbf{x}|) &\leq V(\mathbf{x}) \leq \xi_2(|\mathbf{x}|) + \rho_1(\|\mathbf{w}\|) \\ V(\mathbf{x}^+) - V(\mathbf{x}) &\leq -\xi_3(|\mathbf{x}|) + \rho_2(\|\mathbf{w}\|) \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  和  $\xi_3$  为  $K_\infty$  类函数,  $\rho_1$  和  $\rho_2$  为  $K$  类函数, 则该系统在  $\Theta$  内 ISS, 称  $V$  为该系统的 ISS-Lyapunov 函数.

**注 1.** 由定义 2 可知, 当系统不受扰动或仅受衰减扰动作用时, 系统最终在原点处渐近稳定; 当受持续有界扰动作用时, 系统有界稳定, 且状态轨迹最终收敛的范围与持续扰动的上界有关.

本文目标是针对不确定非线性系统 (1), 通过极小化经济性能函数在线计算鲁棒 EMPC 控制器, 要求相应闭环系统满足约束条件 (2), 且闭环系统的最优经济平衡点相对于容许扰动 (3) 具有 ISS.

## 2 鲁棒经济模型预测控制

考虑有限预测步长  $N \in \mathbf{I}_{\geq 1}$ , 定义  $k \in \mathbf{Z}^+$  时刻的  $N$  步控制序列  $\mathbf{u}(k) = \{\mathbf{u}(0|k), \mathbf{u}(1|k), \dots, \mathbf{u}(N-1|k)\}$ 、扰动序列  $\mathbf{w}(k) = \{\mathbf{w}(0|k), \mathbf{w}(1|k), \dots, \mathbf{w}(N-1|k)\}$  以及对应的预测状态序列  $\mathbf{x}(k) = \{\mathbf{x}(1|k), \mathbf{x}(2|k), \dots, \mathbf{x}(N|k)\}$ , 并且  $\mathbf{x}(i|k) = \varphi(i; \mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{w}(k))$ , 其中  $\mathbf{x}(k)$  为当前时刻系统状态. 考虑系统 (1) 的经济性能函数  $L_e$ , 定义  $N$  步经济目标函数

$$J_e(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) = \sum_{i=0}^{N-1} L_e(\mathbf{x}(i|k), \mathbf{u}(i|k)) \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{x}(0|k) = \mathbf{x}(k)$

为计算鲁棒 EMPC 控制器, 在每个时刻优化经济目标函数 (7). 由于扰动的存在, 在鲁棒 EMPC 中求解如下 min-max 经济最优控制问题:

$$(\mathbf{u}^*(k), \mathbf{w}^*(k)) = \arg \min_{\mathbf{u}(k)} \max_{\mathbf{w}(k)} J_e(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (8a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{x}(i+1|k) = f_1(\mathbf{x}(i|k)) + f_2(\mathbf{x}(i|k))\mathbf{u}(i|k) + f_3(\mathbf{x}(i|k))\mathbf{w}(i|k) \quad (8b)$$

$$\mathbf{x}(i|k) \in X, \quad \mathbf{u}(i|k) \in U, \quad \mathbf{w}(i|k) \in W \quad (8c)$$

$$\mathbf{x}(0|k) = \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(N|k) \in \Omega, \quad \forall i \in \mathbf{I}_{0:N-1} \quad (8d)$$

$$V_R(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{w}(k)) \leq \eta(\mathbf{x}(k), \lambda) \quad (8e)$$

其中,  $(\mathbf{u}^*(k), \mathbf{w}^*(k))$  为  $k$  时刻的经济最优解, 对应最优预测状态序列  $\mathbf{x}^*(k)$ ;  $\mathbf{x}(0|k) = \mathbf{x}(k)$  为初始条件;  $\mathbf{x}(N|k) \in \Omega$  为终端状态约束, 终端约束集  $\Omega \subset X$  且内含原点; (8e) 为待设计的鲁棒稳定性收缩约束,  $\lambda \in [0, 1)$  为收缩因子. 进一步定义如下关于最优经济平衡点的鲁棒稳定性目标函数:

$$V_R(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{w}(k)) = E(\mathbf{x}(N|k)) + \sum_{i=0}^{N-1} \{L(\mathbf{x}(i|k), \mathbf{u}(i|k)) - L_w(\mathbf{w}(i|k))\} \quad (9)$$

其中, 函数  $L: X \times U \rightarrow \mathbf{R}^+$ ,  $L_w: W \rightarrow \mathbf{R}^+$  和  $E: X \rightarrow \mathbf{R}^+$  为连续有界函数. 为书写简洁, 令  $V_R(\mathbf{x}) = V_R(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ .

**假设 2.** 存在  $K_\infty$  类函数  $\alpha_l$ ,  $\alpha_w$  和  $\beta_w$ , 使鲁棒稳定性目标函数  $V_R(\mathbf{x})$  满足:  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq \alpha_l(|\mathbf{x}|)$ ,  $\forall \mathbf{x} \in X$ ,  $\forall \mathbf{u} \in U$ ;  $\alpha_w(\|\mathbf{w}\|) \leq L_w(\mathbf{w}) \leq \beta_w(\|\mathbf{w}\|)$ ,  $\forall \mathbf{w} \in W$ .

**假设 3.** 在终端约束集  $\Omega$  内存在局部反馈控制律  $\mathbf{u} = \pi(\mathbf{x})$  使得  $\pi(\mathbf{x}) \in U$ ,  $\forall \mathbf{x} \in X$  和如下不等式成立:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{x}^+) - E(\mathbf{x}) &\leq -L(\mathbf{x}, \pi(\mathbf{x})) + L_w(\mathbf{w}) \\ \forall \mathbf{x} &\in \Omega, \mathbf{w} \in W \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $\alpha_f(|\mathbf{x}|) \leq E(\mathbf{x}) \leq \beta_f(|\mathbf{x}|)$ ,  $\alpha_f$  和  $\beta_f$  为  $K_\infty$  类函数.

注意, 局部控制律  $\mathbf{u} = \pi(\mathbf{x})$  可采用如  $H_\infty$  控制方法求解<sup>[26, 30]</sup>. 为此, 定义对称矩阵

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_2^T(\mathbf{x})\mathbf{P}f_2(\mathbf{x}) + \mathbf{I} & f_2^T(\mathbf{x})\mathbf{P}f_3(\mathbf{x}) \\ f_3^T(\mathbf{x})\mathbf{P}f_2(\mathbf{x}) & f_3^T(\mathbf{x})\mathbf{P}f_3(\mathbf{x}) - \gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

其中,  $\mathbf{P}$  为对称正定矩阵,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵. 令  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(0)$ . 不失一般性, 令扰动抑制水平  $\gamma = 1$ .

**引理 2**<sup>[30]</sup>. 假设矩阵  $\mathbf{P}$  满足 Riccati 不等式方程

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1^T \mathbf{P} \mathbf{F}_1 - \mathbf{P} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} - \\ \mathbf{A}^T \mathbf{P} [\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3] \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3]^T \mathbf{P} \mathbf{F}_1 < 0 \\ \mathbf{G}^T \mathbf{P} \mathbf{G} - \mathbf{I} < 0 \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{F}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=0}$ ,  $\mathbf{F}_2 = f_2(0)$ ,  $\mathbf{F}_3 = f_3(0)$  和  $\mathbf{G} = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=0}$ . 则存在集合  $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n: E(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \leq c, c > 0\}$  和局部控制律  $\mathbf{u} = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{w}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = -\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{x}) [f_2(\mathbf{x}), f_3(\mathbf{x})]^T \mathbf{P} f_1(\mathbf{x}) \quad (12)$$

使得  $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \in U, \forall \mathbf{x} \in \Omega$  成立, 且局部闭环系统

$$\mathbf{x}^+ = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x})\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) + f_3(\mathbf{x})\mathbf{w} \quad (13)$$

满足

$$E(\mathbf{x}^+) - E(\mathbf{x}) \leq |\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{z}|^2, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{w} \in W \quad (14)$$

**注 2.** 如果假设 3 成立, 则对于任意  $\mathbf{w} \in W$ ,  $\Omega$  为闭环系统 (13) 的一个鲁棒不变集, 同时  $E(\mathbf{x})$  为该系统在  $\Omega$  内的一个 ISS-Lyapunov 函数. 文献 [30] 给出了保证  $\Omega$  鲁棒不变性的一个充分条件, 即容许扰动  $\mathbf{w}$  的上界

$$\|\mathbf{w}\| \leq \frac{\sqrt{\lambda_{\min}} - \sqrt{\lambda_{\max} l_x}}{l_w} \sqrt{\frac{c}{\lambda_{\max} \lambda_{\min}}} \quad (15)$$

其中,  $l_x$  和  $l_w$  分别为闭环系统 (13) 关于  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{w}$  的局部 Lipschitz 常数,  $\lambda_{\max}$  和  $\lambda_{\min}$  分别为矩阵  $\mathbf{P}$  的最大和最小特征值. 如扰动  $\mathbf{w}$  满足式 (15), 则  $\Omega$  为闭环系统 (13) 的鲁棒不变集, 且  $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \in U, \forall \mathbf{x} \in \Omega$ .

下面构造收缩约束函数  $\eta$ . 令  $\mathbf{x}(k)$  为当前时刻系统状态, 求解如下有限时域鲁棒性最优控制问题

$$(\mathbf{u}^0(k), \mathbf{w}^0(k)) = \arg \min_{\mathbf{u}(k)} \max_{\mathbf{w}(k)} V_R(\mathbf{x}(k)) \quad (16a)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{x}(i+1|k) = f_1(\mathbf{x}(i|k)) + f_2(\mathbf{x}(i|k))\mathbf{u}(i|k) + f_3(\mathbf{x}(i|k))\mathbf{w}(i|k) \quad (16b)$$

$$\mathbf{x}(i|k) \in X, \quad \mathbf{u}(i|k) \in U, \quad \mathbf{w}(i|k) \in W \quad (16c)$$

$$\mathbf{x}(0|k) = \mathbf{x}(k), \quad \mathbf{x}(N|k) \in \Omega, \forall i \in \mathbf{I}_{0:N-1} \quad (16d)$$

$$V_R(\mathbf{x}(k)) \leq V_R^1(\mathbf{x}(k)) + \lambda_1 L_w(\|\mathbf{w}\|) \quad (16e)$$

其中,  $(\mathbf{u}^0(k), \mathbf{w}^0(k))$  为  $k$  时刻的鲁棒最优解; 系数  $\lambda_1 \geq 1$ ;  $V_R^1(\mathbf{x}(k)) = V_R(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}^1(k), \mathbf{w}^1(k))$ ,  $(\mathbf{u}^1(k), \mathbf{w}^1(k))$  是  $k$  时刻的一组序列对

$$(\mathbf{u}^1(k), \mathbf{w}^1(k)) =$$

$$\begin{cases} (\mathbf{u}^*(i+1|k-1), \mathbf{w}^*(i+1|k-1)), & i \in \mathbf{I}_{0:N-2} \\ (\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}^*(N|k)), \mathbf{w}^1(N-1|k)), & i = N-1 \end{cases} \quad (17)$$

其中,  $(\mathbf{u}^*(i|k-1), \mathbf{w}^*(i|k-1))$  是优化问题 (8) 在  $k-1$  时刻最优解  $(\mathbf{u}^*(k-1), \mathbf{w}^*(k-1))$  的分量. 将  $(\mathbf{u}^*(k-1), \mathbf{w}^*(k-1))$  和  $(\mathbf{u}^0(k), \mathbf{w}^0(k))$  分别代入  $V_R(\mathbf{x})$ , 据此定义函数

$$\eta(\mathbf{x}(k), \lambda) = V_R^0(\mathbf{x}(k)) + \lambda[V_R^*(\mathbf{x}(k-1)) - V_R^0(\mathbf{x}(k)) + (1 + \lambda_1)L_w(\|\mathbf{w}\|)] \quad (18)$$

其中, 值函数  $V_R^*(\mathbf{x}(k-1)) = V_R(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}^*(k-1), \mathbf{w}^*(k-1))$  和  $V_R^0(\mathbf{x}(k)) = V_R(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}^0(k), \mathbf{w}^0(k))$ .

如果优化问题 (8) 在  $k$  时刻可行, 则根据滚动时域控制原理, 将  $\mathbf{u}^*(k)$  的第 1 个分量定义为鲁棒 EMPC 控制律, 即  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}^{\text{mpc}}(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{u}^*(0|k)$ , 对应闭环系统为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) = \\ f_1(\mathbf{x}(k)) + f_2(\mathbf{x}(k))\mathbf{u}^{\text{mpc}}(\mathbf{x}(k)) + f_3(\mathbf{x}(k))\mathbf{w}(k) \end{aligned} \quad (19)$$

计算鲁棒 EMPC 控制器的算法总结如下:

### 算法 1. 鲁棒 EMPC 算法

**步骤 1.** 初始化. 设定  $N \in \mathbf{I}_{\geq 1}$ ,  $\lambda \in [0, 1)$ ,  $\lambda_1 \geq 1$ ,  $L_e(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $L(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $L_w(\mathbf{w})$  和  $E(\mathbf{x})$ ; 离线计算  $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$  以及  $\Omega$ ; 令  $k = 0$ , 考虑初始状态  $\mathbf{x}_0$ , 令  $\eta$  充分大; 求解优化问题 (8), 得到经济最优解  $(\mathbf{u}^*(0), \mathbf{w}^*(0))$ , 并将  $\mathbf{u}^*(0)$  的首个分量  $\mathbf{u}^*(0|0)$  作用于系统 (1).

**步骤 2.** 在  $k$  时刻, 利用  $k-1$  时刻经济最优解  $(\mathbf{u}^*(k-1), \mathbf{w}^*(k-1))$  构造  $(\mathbf{u}^1(k), \mathbf{w}^1(k))$ , 更新 (16e); 求解优化问题 (16), 得到当前时刻鲁棒最优解  $(\mathbf{u}^0(k), \mathbf{w}^0(k))$ .

**步骤 3.** 计算  $V_R^0(\mathbf{x}(k))$  和  $V_R^*(\mathbf{x}(k-1))$ , 更新  $\eta$ ; 求解优化问题 (8), 得到当前时刻经济最优解  $(\mathbf{u}^*(k), \mathbf{w}^*(tk))$ .

**步骤 4.** 将  $\mathbf{u}^*(k)$  的首个分量  $\mathbf{u}^*(0|k)$  作用于系统 (1).

**步骤 5.** 令  $k = k + 1$ , 测量系统 (1) 的状态; 返回步骤 2.

为更清晰地描述算法 1 的运行过程, 图 1 给出了每个时刻两个优化问题的求解顺序.

由算法 1 和图 1 可知, 在初始时刻  $k = 0$ , 由于约束 (8e) 不起作用, 故在初始时刻无需求解优化问题 (16), 并可令  $\eta(\mathbf{x}_0, \lambda) \rightarrow \infty$ .

## 3 输入到状态稳定性

闭环系统 (19) 具有 ISS 性质的前提是需要保证算法 1 具有递推可行性, 即两个优化问题在每个时刻都至少存在一组可行解 (不一定最优), 使得对于任意容许扰动, 经济优化问题 (8) 和鲁棒性优化

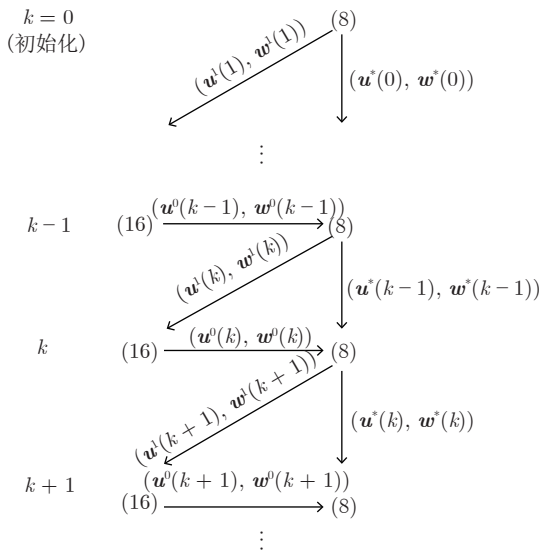


图 1 鲁棒 EMPC 算法运行过程示意图

Fig.1 A schematic diagram of the robust EMPC algorithm

问题 (16) 的所有约束均满足. 注意, (8b)~(8d) 与 (16b)~(16d) 具有相同约束.

考虑约束不确定系统 (1)~(3) 和状态  $\tau = \mathbf{x}(0|k) \in X$ . 对于优化问题 (8), 定义  $N$  步可行控制序列集为

$$U_N(\tau) = \left\{ \mathbf{u} \left| \begin{array}{l} \mathbf{u}(i) \in U, \varphi(i; \tau, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \in X \\ \varphi(N; \tau, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \Omega \\ V_R(\tau, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq \eta(\tau, \lambda) \\ \forall i \in \mathbf{I}_{0:N-1}, \forall \mathbf{w} \in W^N \end{array} \right. \right\}$$

其中,  $N$  步扰动约束集  $W^N = W \times W \times \dots \times W$ .

**定义 3.** 考虑系统 (1) 和状态  $\tau = \mathbf{x}(0|k) \in X$ , 如果可行控制序列集  $U_N(\tau)$  非空, 则称  $\tau$  为该系统的初始可行状态. 所有初始可行状态  $\tau$  的集合称为系统的初始可行状态集  $X_N$ .

**定理 1.** 如果假设 1~3 成立, 且容许扰动满足式 (15), 则优化问题 (16) 具有递推可行性.

**证明.** 考虑序列对  $(\mathbf{u}^1(k), \mathbf{w}^1(k))$  并代入系统 (1) 得到状态序列  $\mathbf{x}^1(k) = \{\mathbf{x}^*(1|k-1), \dots, \mathbf{x}^*(N|k-1), \mathbf{x}^1(N|k)\}$ , 其中  $\mathbf{x}^*(N|k-1) \in \Omega$  是对应于  $\mathbf{u}^*(k-1)$  的终端预测状态. 由假设 3 和注 2 可知,  $\Omega$  是闭环系统 (13) 的鲁棒不变集, 故对于任意  $\mathbf{w}^1(N-1|k) \in W$ ,  $\mathbf{u}^1(N-1|k) = \pi(\mathbf{x}^*(N|k-1)) \in U$  和  $\mathbf{x}^1(N|k) = \varphi(N; \mathbf{x}^*(N|k-1), \mathbf{u}^1(N-1|k), \mathbf{w}^1(N-1|k)) \in \Omega$  成立. 利用序列对  $(\mathbf{u}^1(k), \mathbf{w}^1(k))$  构造优化问题 (16) 在  $k$  时刻的备选解

$$(\mathbf{u}^2(k), \mathbf{w}^2(k)) = \begin{cases} (\mathbf{u}^1(i+1|k), \mathbf{w}^1(i+1|k)), & i \in \mathbf{I}_{0:N-2} \\ (\pi(\mathbf{x}^1(N|k)), \mathbf{w}^2(N-1|k)), & i = N-1 \end{cases} \quad (20)$$

其对应状态序列  $\mathbf{x}^2(k) = \{\mathbf{x}^1(1|k), \dots, \mathbf{x}^1(N|k), \mathbf{x}^2(N|k)\}$ , 其中  $\mathbf{x}^1(N|k) \in \Omega$ . 又  $\Omega$  是鲁棒不变的, 则对于任意  $\mathbf{w}^2(N-1|k) \in W$ ,  $\mathbf{u}^2(N-1|k) = \pi(\mathbf{x}^1(N|k)) \in U$  和  $\mathbf{x}^2(N|k) = \varphi(N; \mathbf{x}^1(N|k), \mathbf{u}^2(N-1|k), \mathbf{w}^2(N-1|k)) \in \Omega$  成立, 因此约束 (16b)~(16d) 满足.

再分别将  $(\mathbf{u}^1(k), \mathbf{w}^1(k))$  和  $(\mathbf{u}^2(k), \mathbf{w}^2(k))$  代入函数  $V_R(x)$  中, 计算得

$$\begin{aligned} V_R^2(\mathbf{x}(k)) - V_R^1(\mathbf{x}(k)) - \lambda_1 L_w(\|\mathbf{w}\|) = & E(\mathbf{x}^2(N|k)) - E(\mathbf{x}^1(N|k)) + \\ & L(\mathbf{x}^1(N|k), \pi(\mathbf{x}^1(N|k))) - L_w(\mathbf{w}^1(N-1|k)) - \\ & L(\mathbf{x}^1(0|k), \mathbf{u}^1(0|k)) + L_w(\mathbf{w}^1(0|k)) - \lambda_1 L_w(\|\mathbf{w}\|) \end{aligned} \quad (21)$$

其中,  $V_R^2(\mathbf{x}(k)) = V_R(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}^2(k), \mathbf{w}^2(k))$ . 再次应用假设 3, 将式 (10) 代入式 (21), 则对于任意  $\lambda_1 \geq 1$ , 有

$$V_R^2(\mathbf{x}(k)) \leq V_R^1(\mathbf{x}(k)) + \lambda_1 L_w(\|\mathbf{w}\|) \quad (22)$$

故约束 (16e) 满足, 从而  $(\mathbf{u}^2(k), \mathbf{w}^2(k))$  为问题 (16) 在  $k$  时刻的可行解, 即优化问题 (16) 具有递推可行性.  $\square$

**定理 2.** 如果假设 1~3 成立, 且容许扰动满足式 (15), 则优化问题 (8) 具有递推可行性.

**证明.** 令  $(\mathbf{u}^0(k), \mathbf{w}^0(k))$  为优化问题 (16) 在  $k$  时刻的最优解, 由定理 1 可知  $V_R^0(\mathbf{x}(k)) \leq V_R^1(\mathbf{x}(k)) + \lambda_1 L_w(\|\mathbf{w}\|)$ . 对  $V_R^0(\mathbf{x}(k))$  和  $V_R^*(\mathbf{x}(k-1))$  做如下运算:

$$\begin{aligned} V_R^0(\mathbf{x}(k)) - V_R^*(\mathbf{x}(k-1)) \leq & V_R^1(\mathbf{x}(k)) + \lambda_1 L_w(\|\mathbf{w}\|) - V_R^*(\mathbf{x}(k-1)) = \\ & E(\mathbf{x}^1(N|k)) - E(\mathbf{x}^*(N|k-1)) + \\ & L(\mathbf{x}^*(N|k-1), \pi(\mathbf{x}^*(N|k-1))) - \\ & L_w(\mathbf{w}^1(N-1|k)) - L(\mathbf{x}^*(0|k-1), \mathbf{u}^*(0|k-1)) + \\ & L_w(\mathbf{w}^*(0|k-1)) + \lambda_1 L_w(\|\mathbf{w}\|) \end{aligned} \quad (23)$$

应用假设 2 和假设 3, 式 (23) 改写为

$$V_R^*(\mathbf{x}(k-1)) - V_R^0(\mathbf{x}(k)) + (1 + \lambda_1) L_w(\|\mathbf{w}\|) \geq L(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1)) \quad (24)$$

将式 (24) 代入函数  $\eta$ , 则对于任意  $\lambda \in [0, 1)$ , 有

$$V_R^0(\mathbf{x}(k)) \leq \eta(\mathbf{x}(k), \lambda) \quad (25)$$

故约束 (8e) 成立. 由定理 1 可知,  $(\mathbf{u}^0(k), \mathbf{w}^0(k))$  作为优化问题 (16) 在  $k$  时刻的最优解满足约束 (8b)~(8d). 因此, 在  $k$  时刻总存在可行控制序列  $\mathbf{u}^0(k)$  满

足优化问题 (8) 的所有约束, 从而优化问题 (8) 具有递推可行性.  $\square$

根据定理 1 和定理 2, 本文鲁棒 EMPC 策略中的双目标优化问题皆具有递推可行性. 下面将基于定理 1 和定理 2 给出闭环系统 (19) 的 ISS 结果.

**定理 3.** 如果假设 1~3 成立, 且容许扰动满足式 (15), 则当优化问题 (8) 在初始时刻存在可行解时, 闭环系统 (19) 在鲁棒不变集  $X_N$  内相对于扰动具有 ISS.

**证明.** 由定理 1 和定理 2 可知, 当优化问题 (8) 在初始时刻存在可行解时, 该优化问题在任意  $k$  时刻都是可行的, 则对任意  $\mathbf{x}(k) \in X_N$  和  $\mathbf{w}(k) \in W$ , 闭环系统 (19) 满足  $\mathbf{x}(k+1) \in X_N$ . 由定义 3 可知,  $X_N$  为闭环系统 (19) 的一个鲁棒不变集.

令  $V_N(\mathbf{x}(k)) = V_R^*(\mathbf{x}(k)) + NL_w(\|\mathbf{w}\|)$ , 并选择  $V_N(\mathbf{x}(k))$  作为闭环系统 (19) 的备选 ISS-Lyapunov 函数. 考虑假设 2, 对于任意  $\mathbf{x}(k) \in X_N$ , 有

$$V_N(\mathbf{x}(k)) = V_R^*(\mathbf{x}(k)) + NL_w(\|\mathbf{w}\|) \geq L(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \geq \alpha_1(|\mathbf{x}(k)|) \quad (26)$$

其中,  $\alpha_1 = \alpha_l$  为  $K_\infty$  类函数.

假设函数  $V_R(\mathbf{x}(k))$  存在上界  $v < +\infty$ , 且  $v$  为一个足够大的常数. 定义内部包含原点且半径为  $r$  的球形区域  $B_r = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : |\mathbf{x}| \leq r\} \subseteq \Omega$ . 设常数  $\varepsilon = \max\{1, v/\beta_f(r)\} \geq 1$ , 令函数  $\alpha_2 = \varepsilon\beta_f$ . 下面考虑两种情况:

1) 当  $\mathbf{x}(k) \in \Omega$  时, 由假设 3 可知,

$$E(\mathbf{x}(i+1|k)) - E(\mathbf{x}(i|k)) \leq L_w(\mathbf{w}(i|k)) - L(\mathbf{x}(i|k), \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}(i|k))), \quad i \in \mathbf{I}_{0:N-1} \quad (27)$$

其中,  $\mathbf{x}(i+1|k) = \varphi(i+1; \mathbf{x}(i|k), \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}(i|k)), \mathbf{w}(i|k))$  且  $\mathbf{x}(i|k) \in \Omega$ . 由于  $\Omega$  是鲁棒不变集, 故对于任意容许扰动  $\mathbf{w}(i|k)$ , 满足  $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}(i|k)) \in U$  和  $\mathbf{x}(i+1|k) \in \Omega$ . 从  $i=0$  到  $N-1$ , 将不等式 (27) 累加得

$$E(\mathbf{x}(k)) \leq \sum_{i=0}^{N-1} (L(\mathbf{x}(i|k), \mathbf{u}(i|k)) - L_w(\mathbf{w}(i|k))) + E(\mathbf{x}(N|k)) \quad (28)$$

结合假设 2, 存在  $K_\infty$  类函数  $\beta_f$  和  $\alpha_2$  满足

$$V_R^*(\mathbf{x}(k)) \leq E(\mathbf{x}(k)) \leq \beta_f(|\mathbf{x}(k)|) \leq \alpha_2(|\mathbf{x}(k)|) \quad (29)$$

2) 当  $\mathbf{x}(k) \notin \Omega$  时,  $\mathbf{x}(k) \notin B_r$ , 则  $\beta_f(|\mathbf{x}(k)|) \geq \beta_f(r)$ , 得

$$V_R^*(\mathbf{x}(k)) \leq v \leq v \times \frac{\beta_f(|\mathbf{x}(k)|)}{\beta_f(r)} \leq \varepsilon\beta_f(|\mathbf{x}(k)|) = \alpha_2(|\mathbf{x}(k)|) \quad (30)$$

联立上述两种情况, 整理得

$$V_R^*(\mathbf{x}(k)) \leq \alpha_2(|\mathbf{x}(k)|), \quad \forall \mathbf{x}(k) \in X_N \quad (31)$$

则对于任意容许扰动  $\mathbf{w}(k)$ , 值函数  $V_N(\mathbf{x}(k))$  满足

$$V_N(\mathbf{x}(k)) \leq \alpha_2(|\mathbf{x}(k)|) + \delta_1(\|\mathbf{w}\|), \quad \forall \mathbf{x}(k) \in X_N \quad (32)$$

其中,  $\delta_1$  为  $K$  类函数.

令  $(\mathbf{u}^*(k-1), \mathbf{w}^*(k-1))$  和  $(\mathbf{u}^*(k), \mathbf{w}^*(k))$  分别为优化问题 (8) 在  $k-1$  和  $k$  时刻的经济最优解, 考虑函数 (18), 将函数  $V_R^*(\mathbf{x})$  沿着闭环状态轨迹 (19) 做差分运算

$$\begin{aligned} V_R^*(\mathbf{x}(k)) - V_R^*(\mathbf{x}(k-1)) &\leq \\ &\eta(\mathbf{x}(k), \lambda) - V_R^*(\mathbf{x}(k-1)) = \\ &(1-\lambda)(V_R^0(\mathbf{x}(k)) - V_R^*(\mathbf{x}(k-1))) + \\ &\lambda(1+\lambda_1)L_w(\|\mathbf{w}\|) \end{aligned} \quad (33)$$

由定理 1 可知,  $V_R^0(\mathbf{x}(k)) \leq V_R^1(\mathbf{x}(k)) + \lambda_1 L_w(\|\mathbf{w}\|)$ , 将该不等式代入式 (33), 整理可得

$$\begin{aligned} V_R^*(\mathbf{x}(k)) - V_R^*(\mathbf{x}(k-1)) &\leq \\ &(1-\lambda)(V_R^1(\mathbf{x}(k)) - V_R^*(\mathbf{x}(k-1)) + \\ &\lambda_1 L_w(\|\mathbf{w}\|)) + \lambda(1+\lambda_1)L_w(\|\mathbf{w}\|) \leq \\ &(\lambda-1)L(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1)) + (1+\lambda_1)L_w(\|\mathbf{w}\|) \end{aligned} \quad (34)$$

考虑函数  $V_N(\mathbf{x}(k))$  定义, 式 (34) 等价于

$$\begin{aligned} V_N(\mathbf{x}(k)) - V_N(\mathbf{x}(k-1)) &= \\ V_R^*(\mathbf{x}(k)) - V_R^*(\mathbf{x}(k-1)) &\leq \\ (\lambda-1)L(\mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1)) + (1+\lambda_1)L_w(\|\mathbf{w}\|) \end{aligned} \quad (35)$$

由于  $\lambda \in [0, 1)$  和  $\lambda_1 \geq 1$ , 故存在  $K_\infty$  类函数  $\alpha_3$  和  $K$  类函数  $\delta_2$ , 使得如下不等式

$$V_N(\mathbf{x}(k)) - V_N(\mathbf{x}(k-1)) \leq \delta_2(\|\mathbf{w}\|) - \alpha_3(|\mathbf{x}(k-1)|), \quad \forall \mathbf{x}(k-1) \in X_N \quad (36)$$

成立. 则联立不等式 (26), (32) 和 (36), 由引理 1 可知, 值函数  $V_N(\mathbf{x}(k))$  为闭环系统 (19) 的一个 ISS-Lyapunov 函数. 因此, 闭环系统 (19) 在  $X_N$  内相对于扰动具有输入到状态稳定性.  $\square$

## 4 实例仿真

考虑不确定非线性连续搅拌釜反应器 (CSTR)

$$\begin{cases} \frac{dc_A(t)}{dt} = \frac{Q(t)(c_{Af} - c_A(t) + \Delta c(t))}{V} - k_0 c_A^2(t) \\ \frac{dc_B(t)}{dt} = \frac{Q(t)(c_{Bf} - c_B(t))}{V} + k_0 c_A^2(t) \end{cases} \quad (37)$$

其中,  $c_A$  和  $c_B$  分别为组分 A 和 B 的浓度,  $Q$  为反应器进料流量,  $c_{Af}$  和  $c_{Bf}$  分别为进料中组分 A 和 B 的浓度,  $\Delta c$  为进料中组分 A 浓度的不确定波动, 体积  $V$  和反应动力学参数  $k_0$ . 当忽略进料中组分浓度的波动, 该模型广泛用于名义稳定 EMPC 综合策略的验证<sup>[10, 13, 21]</sup>. 这里假设进料中组分 A 的浓度波动是有界的, 用于验证本文鲁棒 EMPC 的有效性. 取模型参数<sup>[10]</sup>:  $c_{Af} = 1.0 \text{ mol/l}$ ,  $c_{Bf} = 0$ ,  $V = 10 \text{ l}$  和  $k_0 = 1.2 \text{ l}/(\text{mol}\cdot\text{min})$ .

令  $[c_A, c_B]^T$  为系统状态  $[x_1, x_2]^T$ ,  $Q$  为控制输入  $u$ ,  $w$  为扰动  $\Delta c$ . 进一步, 定义状态约束和控制约束

$$x_1 \in [0, 1], x_2 \in [0, 1], u \in [0, 15] \quad (38)$$

选择采样周期  $T_s = 0.1 \text{ min}$ , 利用欧拉差分法离散化连续时间模型 (37), 得 CSTR 非线性离散时间模型

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) - 1.2T_s x_1^2(k) \\ x_2(k) + 1.2T_s x_1^2(k) \end{bmatrix} + \\ \frac{T_s}{10} \begin{bmatrix} 1 - x_1(k) \\ -x_2(k) \end{bmatrix} u(k) + \frac{T_s}{10} \begin{bmatrix} u(k) \\ 0 \end{bmatrix} w(k) \\ z(k) = [x^T(k) \quad u(k)]^T \end{cases} \quad (39)$$

其中,  $k$  为采样时刻. 定义 CSTR 经济性能指标<sup>[10]</sup>

$$L_e(\mathbf{x}, u) = 0.5u(1 - 4x_2) \quad (40)$$

由式 (4) 计算最优经济平衡点为  $\mathbf{x}_e^* = (0.5785, 0.4215)$  和  $u_e^* = 9.5258$ . 通过求解关于平衡点  $(\mathbf{x}_e^*, u_e^*)$  的 Riccati 不等式方程 (11), 得

$$P = \begin{bmatrix} 20 & 0.5 \\ 0.5 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\pi(\mathbf{x}) = [-0.0655, 0.0739](\mathbf{x} - \mathbf{x}_e^*) + u_e^*$$

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2: (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e^*)^T P (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e^*) \leq 2.12\}$$

进一步, 为保证终端状态集  $\Omega$  的鲁棒不变性, 由式 (15) 计算容许扰动上界为 0.1436.

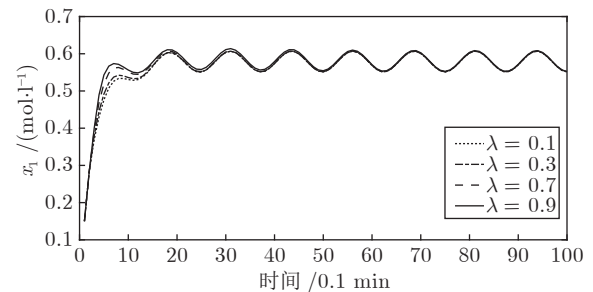
令预测步长  $N = 5$ , 仿真总步长  $T_{\text{sim}} = 100$ , 系数  $\lambda_1 = 1$ , 并考虑不同收缩因子  $\lambda \in [0, 1)$  的控制效果. 选择系统初始状态  $\mathbf{x}_0 = (0.15, 0.7)^T$ , 仿真结果如图 2 和图 3 所示, 图 2 对应持续扰动  $w(k) = 0.1436 \sin(k/2)$  的仿真结果, 图 3 对应衰减扰动  $w(k) = 0.1436 \exp(-k/10)$  的仿真结果. 分析图 2 可知, 在持续扰动下, 闭环系统最终在最优经济平衡点  $(\mathbf{x}_e^*, u_e^*)$  附近有界稳定; 分析图 3 可知, 在衰减扰动下, 闭环状态轨迹渐近收敛于  $(\mathbf{x}_e^*, u_e^*)$ . 根据图 2 和图 3 可知, 对于不同收缩因子  $\lambda \in [0, 1)$ , 由算法 1 得到的鲁棒

EMPC 控制器使得闭环系统在  $(\mathbf{x}_e^*, u_e^*)$  相对于容许扰动总是 ISS 的, 但不同  $\lambda$  对应的闭环状态轨迹的动态响应不同. 以衰减扰动  $w(k) = 0.1436 \exp(-k/10)$  为例, 由图 3 可知, 因子  $\lambda$  越小, 闭环状态轨迹的收敛过渡时间  $T_{\text{tr}}$  越短, 具体数据如表 1 最右列所示.

定义闭环系统  $T$  步平均经济性能指标

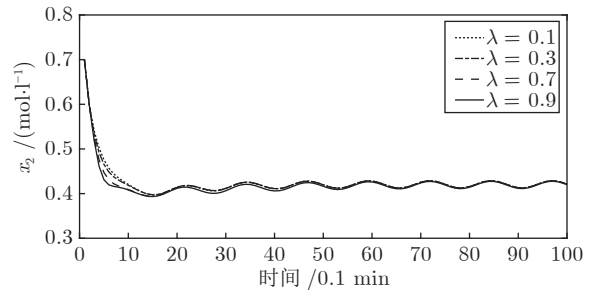
$$J_{\text{ave}} = \frac{\sum_{k=0}^T L_e(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}^{\text{mpc}}(\mathbf{x}(k)))}{T} \quad (41)$$

取  $T = 100$ , 表 1 给出了不同  $\lambda$  值对应的闭环系统平均经济性能. 分析表 1 可以看出, 因子  $\lambda$  越大, 闭环系统平均经济性能越好. 这表明, 无论是名义系统还是不确定系统, 闭环系统的经济最优性和稳定性是互相冲突的双控制目标<sup>[10, 21]</sup>. 在本文鲁棒



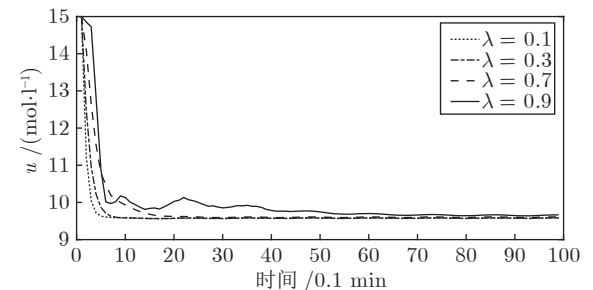
(a) 状态  $x_1$  轨迹 (sin)

(a) State  $x_1$  trajectories (sin)



(b) 状态  $x_2$  轨迹 (sin)

(b) State  $x_2$  trajectories (sin)



(c) 控制输入  $u$  (sin)

(c) Control input  $u$  (sin)

图 2 持续扰动  $w(k) = 0.1436 \sin(k/2)$  的仿真结果

Fig. 2 Simulation results under continuous disturbance  $w(k) = 0.1436 \sin(k/2)$



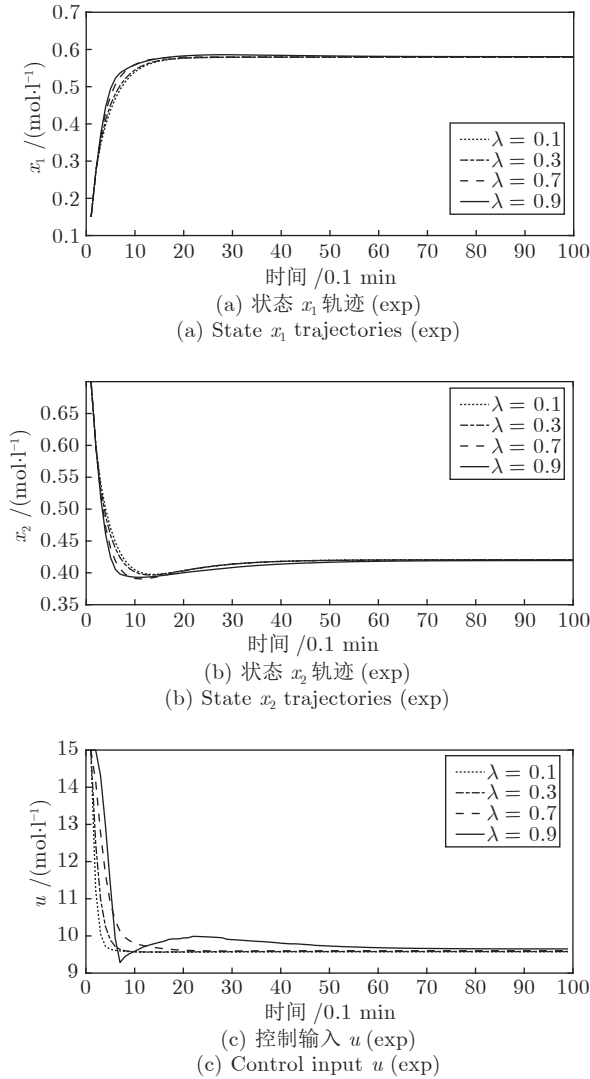


图 3 持续扰动  $w(k) = 0.1436 \exp(-k/10)$  的仿真结果

Fig.3 Simulation results under continuous disturbance  $w(k) = 0.1436 \exp(-k/10)$

表 1 平均经济性能和收敛过渡时间

Table 1 Average economic performance and transient time

$\lambda$	$w(k) = 0.1436 \sin(k/2)$		$w(k) = 0.1436 \exp(-k/10)$
	$J_{ave}$	$J_{ave}$	$T_r$
0.1	-3.4361	-3.3953	$49T_s$
0.3	-3.4464	-3.4019	$54T_s$
0.5	-3.4553	-3.4083	$58T_s$
0.7	-3.4623	-3.4143	$65T_s$
0.9	-3.4712	-3.4194	$74T_s$

EMPC 策略中, 可以通过调节收缩因子  $\lambda$  对经济性控制目标和鲁棒稳定性控制目标进行权衡, 从而实现经济性和鲁棒稳定性综合控制效果.

进一步, 为了验证本文鲁棒 EMPC 策略 (简记

为 MM-EMPC) 的优越性, 对比文献 [38] 中鲁棒收缩 EMPC 策略 (简记为 RC-EMPC), 研究不同容许扰动上限对系统稳定性的影响. 对约束 CSTR 系统 (37) 和 (38), 在系统参数相同情况下, RC-EMPC 策略容许扰动上限  $d_1 = 0.0136$ , MM-EMPC 容许扰动上限  $d_2 = 0.1436$ . 选择持续扰动  $w(k) = 0.04\sin(k/5)$ , 令初始状态  $\mathbf{x}_0 = (0.5, 0.5)^T$ , 仿真步长  $T_{sim} = 500$ . 在相同仿真环境下, 两种鲁棒 EMPC 策略的控制结果如图 4 所示, 其中, 实线表示 MM-EMPC 策略仿真结果, 虚线表示 RC-EMPC 策略仿真结果.

从图 4 可以看出, MM-EMPC 策略对应的闭环

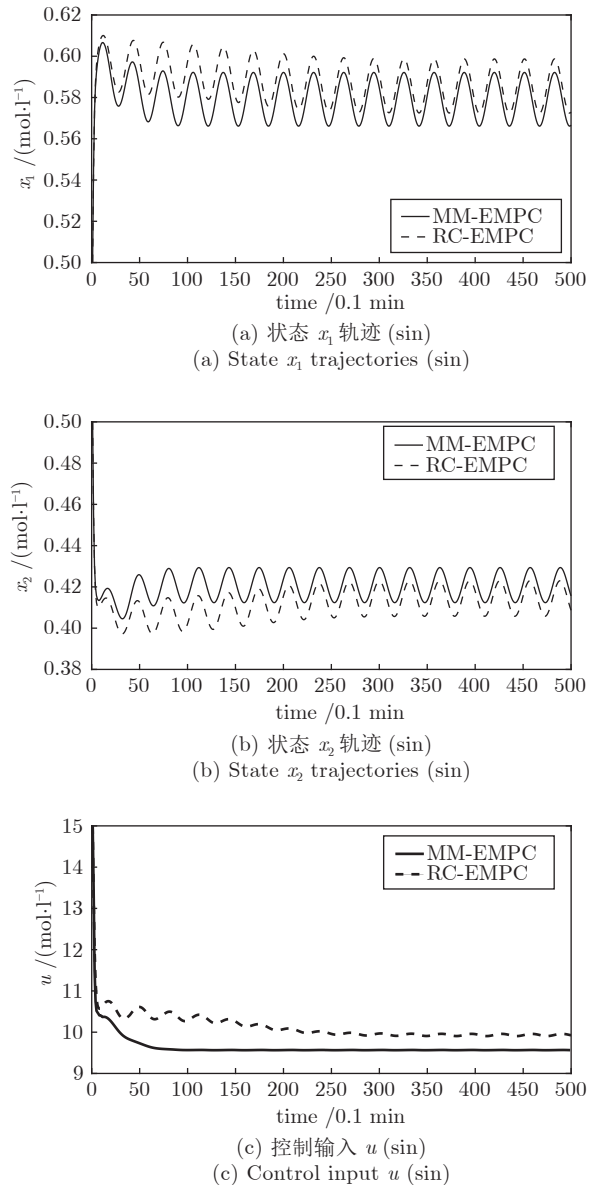


图 4 闭环状态轨迹和控制输入曲线

Fig.4 Closed-loop state trajectory and control input profiles



状态轨迹和控制输入曲线均收敛于  $(\mathbf{x}_e^*, \mathbf{u}_e^*)$  附近, 而 RC-EMPC 策略对应的闭环轨迹虽然收敛, 但存在较大的稳态误差, 且 MM-EMPC 闭环系统的动态响应更加快速. 进一步, 考虑衰减扰动  $w(k) = 0.04 \exp(-k/5)$ , 选择 4 个不同的初始状态对两种控制策略进行仿真对比分析, 控制结果如图 5 所示. 综合图 4 和图 5 分析可知, 当容许扰动上界  $d \in (d_1, d_2)$  时, MM-EMPC 策略下的闭环系统相对于扰动是 ISS 的, 而 RC-EMPC 却无法保证闭环系统相对于扰动具有 ISS, 其中一个重要原因是 RC-EMPC 对大扰动会丢失递推可行性. 因此, 相较于 RC-EMPC 策略, 本文策略在保证闭环系统 ISS 同时, 能够获得更大的容许扰动上界, 从而降低鲁棒 EMPC 控制器的保守性.

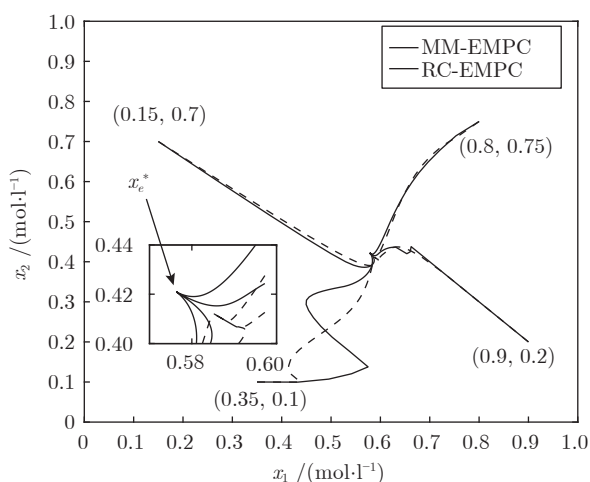


图 5 不同初始状态的闭环系统相轨迹

Fig. 5 Phase trajectories of the closed-loop system from different initial states

## 5 结束语

本文针对有界扰动下的约束不确定仿射输入非线性系统, 提出了一种新的鲁棒 EMPC 策略. 基于微分对策原理分别对经济目标函数和关于最优经济平衡点的鲁棒稳定性目标函数进行优化, 利用得到的鲁棒稳定性目标最优值函数构造隐式收缩约束, 保证了双控制目标优化问题的递推可行性, 并建立了闭环系统在最经济平衡点处相对于扰动的输入到状态稳定性结果. 通过对不确定 CSTR 经济优化控制的对比仿真实验, 验证了本文策略的有效性和优越性.

尽管基于微分对策的 min-max 鲁棒 EMPC 在理论上能有效提高鲁棒 EMPC 的性能, 但 min-max 优化在线计算复杂, 将阻碍鲁棒 EMPC 在快速响应系统中的应用. 因此, 降低 min-max 鲁棒

EMPC 的在线优化计算量和设计更高效的鲁棒 EMPC 策略 (如 Tube 鲁棒 EMPC、本质鲁棒 EMPC 等) 将是后续研究重点.

## References

- 1 Mayne D Q. Model predictive control: Recent developments and future promise. *Automatica*, 2014, **50**(12): 2967–2986
- 2 Ellis M, Durand H, Christofides P D. A tutorial review of economic model predictive control methods. *Journal of Process Control*, 2014, **24**(8): 1156–1178
- 3 Liu X J, Cui J H. Economic model predictive control of boiler-turbine system. *Journal of Process Control*, 2018, **66**: 59–67
- 4 He De-Feng, Zhang Yong-Da, Li Lian-Ming, Qiu Xiang. Lexicographic economic predictive control without terminal constraints for CFBB combustion systems. *CIESC Journal*, 2020, **71**(3): 1210–1216  
(何德峰, 张永达, 李廉明, 仇翔. 循环流化床燃烧系统无终端约束字典序经济预测控制. *化工学报*, 2020, **71**(3): 1210–1216)
- 5 Clarke W C, Manzie C, Brear B J. Hierarchical economic MPC for systems with storage states. *Automatica*, 2018, **94**: 138–150
- 6 Tian H, Lu Q G, Gopaluni R B, Zavala V M, Olson J A. An economic model predictive control framework for mechanical pulping processes. *Control Engineering Practice*, 2019, **85**: 100–109
- 7 He D F, Qiu T X, Luo R S. Fuel efficiency-oriented platooning control of connected nonlinear vehicles: A distributed economic MPC approach. *Asian Journal of Control*, 2019, **21**: 1–11
- 8 Farooqi H, Fagiano L, Colaneri P, Barlini D. Shrinking horizon parametrized predictive control with application to energy-efficient train operation. *Automatica*, 2020, **112**, 108635
- 9 Zhang Bo, Guo Ge, Wang Li-Yuan, Wang Qiong. Vehicle speed planning and control for fuel consumption optimization with traffic light state. *Acta Automatica Sinica*, 2018, **44**(3): 461–470  
(张博, 郭戈, 王丽媛, 王琼. 基于信号灯状态的燃油最优车速规划与控制. *自动化学报*, 2018, **44**(3): 461–470)
- 10 Diehl M Q, Amrit R, Rawlings J B. A Lyapunov function for economic optimizing model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **56**(3): 703–707
- 11 Ferramosca A, Limon D, Camacho E F. Economic MPC for a changing economic criterion for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, **59**(10): 2657–2667
- 12 Angeli D, Amrit R, Rawlings J B. On average performance and stability of economic model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(7): 1615–1626
- 13 Amrit R, Rawlings J B, Angeli D. Economic optimization using model predictive control with a terminal cost. *Annual Reviews in Control*, 2011, **35**(2): 178–186
- 14 Yang Ya-Ru, Li Shao-Yuan. Economic model predictive control for global optimal operation of nonlinear switching systems. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(6): 1017–1027  
(杨亚茹, 李少远. 切换非线性系统全局优化运行的经济预测控制. *自动化学报*, 2017, **43**(6): 1017–1027)
- 15 Limon D, Pereira M, De la Pena D M, Alamo T, Grosso J M. Single-layer economic model predictive control for periodic operation. *Journal of Process Control*, 2014, **24**(8): 1207–1224
- 16 Grüne L. Economic receding horizon control without terminal constraints. *Automatica*, 2013, **49**(3): 725–734
- 17 Müller M A, Grüne L. Economic model predictive control without terminal constraints for optimal periodic behavior. *Automatica*, 2016, **70**(8): 128–139
- 18 Müller M A, Angeli D, Allgöwer F, Amrit R, Rawlings J B. Convergence in economic model predictive control with average constraints. *Automatica*, 2014, **50**(12): 3100–3111
- 19 Zavala V M. A multiobjective optimization perspective on the

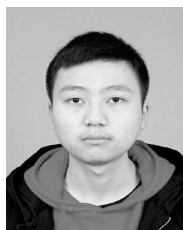
- stability of economic MPC. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, **48**(8): 974–980
- 20 He De-Feng. Stabilizing economic model predictive control of constrained nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2016, **42**(11): 1680–1690  
(何德峰. 约束非线性系统稳定经济模型预测控制. 自动化学报, 2016, **42**(11): 1680–1690)
- 21 He D F, Sun J, Yu L. Economic MPC with a contractive constraint for nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, **26**(18): 4072–4087
- 22 Yu S Y, Reble M, Chen H, Allgöwer F. Inherent robustness properties of quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control. *Automatica*, 2014, **50**(9): 2269–2280
- 23 Limon D, Alamo T, Camacho E F. Input-to-state stable MPC for constrained discrete-time nonlinear systems with bounded additive uncertainties. In: Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas, NV, USA: IEEE, 2002.4619–4624.
- 24 Yu S Y, Maier C, Chen H, Allgöwer F. Tube MPC scheme based on robust control invariant set with application to Lipschitz nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 2013, **62**(2): 194–200
- 25 Mayne D Q, Kerrigan E F, Wyk E, Falugi P. Tube-based robust nonlinear model predictive control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, **21**: 1341–1353
- 26 Magni L, De Nicolao G, Scattolini R, Allgöwer F. Robust model predictive control for nonlinear discrete-time systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, **13**: 229–246
- 27 Magni L, Raimondo D M, Scattolini R. Regional input-to-state stability for nonlinear model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(9): 1548–1553
- 28 Limon D, Alamo T, Salas F, Camacho E F. Input-to-state stability of min-max MPC controllers for nonlinear systems with bounded uncertainties. *Automatica*, 2006, **42**(5): 797–803
- 29 He D F, Zheng T, Ji H B. On robustness of suboptimal min-max model predictive control. *WSEAS Transactions on Systems and Control*, 2007, **2**(8): 428–433
- 30 He De-Feng, Ji Hai-Bo, Zheng Tao. Nonlinear  $H_\infty$  robust predictive control with bounded persistent disturbances. *Acta Automatica Sinica*, 2008, **34**(2): 215–219  
(何德峰, 季海波, 郑涛. 持续有界扰动下的非线性 $H_\infty$ 鲁棒预测控制. 自动化学报, 2008, **34**(2): 215–219)
- 31 He D F, Ji H B, Zheng T. On robustness of constrained nonlinear  $H_\infty$  predictive controllers with disturbances. *International Journal of Systems Science*, 2010, **41**(2): 203–212
- 32 Lazar M, Munoz de la Pena D, Heemels W P M H, Alamo T. On input-to-state stability of min-max nonlinear model predictive control. *Systems of Control Letters*, 2008, **57**: 39–48
- 33 Broomhead T J, Manzie C, Shekhar R C, Hield P. Robust stable economic MPC with applications in engine control. In: Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control. Los Angeles, CA, USA: IEEE, 2014. 2511–2516
- 34 Broomhead T J, Manzie C, Shekhar R C, Hield P. Robust periodic economic MPC for linear systems. *Automatica*, 2015, **60**(10): 30–37
- 35 Griffith D W, Zavala V M, Biegler L T. Robustly stable economic NMPC for non-dissipative stage costs. *Journal of Process Control*, 2017, **57**: 116–126
- 36 Alessandretti A, Aguiar A P, Jones C N. An input-to-state stability approach to economic optimization in model predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(12): 6081–6093
- 37 Zhao M, Jiang C C, She M H. Robust contractive economic MPC for nonlinear systems with additive disturbance. *International Journal of Control, Automatic and Systems*, 2018, **16**(5): 2253–2263
- 38 He D F, Qiu T X, Lu L Y. Input-to-state stability of contractive EMPC of nonlinear systems with bounded disturbances. *IET Control Theory and Applications*, 2019, **13**(5): 651–658



**何德峰** 浙江工业大学信息工程学院教授. 2008 年获得中国科学技术大学自动化系博士学位. 主要研究方向为智能系统预测控制理论与应用. 本文通信作者.

E-mail: hdfzj@zjut.edu.cn

**(HE De-Feng** Professor at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. He received his Ph.D. degree from the Department of Automation, University of Science and Technology of China in 2008. His research interest covers predictive control theory and applications of intelligent systems. Corresponding author of this paper.)



**韩平** 浙江工业大学信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为非线性系统经济模型预测控制.

E-mail: hanping@zjut.edu.cn

**(HAN Ping** Master student at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His research interest covers economic model predictive control of nonlinear systems.)



**王青松** 浙江工业大学信息工程学院硕士研究生. 主要研究方向为非线性系统经济模型预测控制.

E-mail: 2111903053@zjut.edu.cn

**(WANG Qing-Song** Master student at the College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology. His research interest covers economic model predictive control of nonlinear systems.)